

VIZSGADOLGOZAT
mat.tanár szak II. évf., 2004. 06. 16.

A. Feladatok

1. Adja meg az $e^{x^2-y}(5-2x+y)$ függvény szélsőértékeit! (8 pont)
2. Tekintsük az $\int_0^{2a} (\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y) dy) dx$ integrált! Ábrázolja az integrációs tartományt és cserélje föl az integráció sorrendjét! (8 pont)
3. Számolja ki az $\iint_T \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy$ integrált, ahol T a $\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2$ tartomány! (8 pont)
4. Legyen $f(x,y) := \sqrt{|xy|}$. Adja meg a parciális deriváltakat, vizsgálja a totális differenciálhatóságot! (9 pont)
5. Integráló tényező segítségével tegye egzakttá és oldja meg az $x^2 + y^2 + 2x + 2yy' = 0$ differenciálegyenletet! (7 pont)
6. Számolja ki az alábbi határértéket: (5 pont)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$$

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Mit ért az alatt, hogy egy halmaz korlátos és zárt (azaz kompakt)?
2. Mit ért az alatt, hogy az f k -változós függvény folytonos az $A \in \mathbb{R}^k$ pontban? (Mindkét definíciót adja meg!)
3. Mondja ki a hányadosfüggvény parciális differenciálhatóságára vonatkozó tételt!
4. Definiálja a $H \in \mathbb{R}^2$ halmaz n -edik külső sokszögét!
5. Mondja ki a vonalmenti integrál útfüggetlenségének feltételét (a potenciálfüggvényes alakban)!
6. Mondja ki a Young tételt!

C. További kérdések (3 × 7 pont)

1. Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos. Számolja ki az alábbi határértéket:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h}^h \left(\int_{-h}^h f(x,y) dy \right) dx$$

2. Tekintsük az $x^3 + y^3 = 3xy$ egyenletű görbe első negyedbeli ($x, y > 0$) ívét. Hol van a legmagasabban fekvő pontja?
3. Van-e olyan, Jordan szerint nem mérhető halmaz, amelynek belseje és lezártja is Jordan szerint mérhető?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!