VIZSGADOLGOZAT

mat.tanár szak II. évf., 2004. 06. 08.

A. Feladatok

1. Adja meg az $x + y + 4\sin x \sin y$, $0 < x, y < \pi$ függvény szélsőértékeit! (8 pont)

2. Tekintsük az $\int_{-1}^{1}(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy)\,dx$ integrált! Ábrázolja az integrációs tartományt és cserélje föl az integráció sorrendjét! (8 pont)

3. Számolja ki az $\iint_T \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ integrált, ahol T az $x^2+y^2 \leq x$ tartomány! (8 pont)

4. Számolja ki az $\int_G \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+4y^2}$ integrált, ahol a G görbe az $x^2+y^2=1$ kör pozitív irányításban! (8 pont)

5. Integráló tényező segítségével tegye egzakttá és oldja meg az $y(1+xy) - xy' = 0$ differenciálegyenletet! (7 pont)

6. Számolja ki az alábbi határértéket: (6 pont)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1 + x^2y^2\right)^{-1/(x^2+y^2)}$$

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Definiálja a normált tér fogalmát!

2. Mit ért azalatt, hogy az f k-változós függvény határértéke az $A \in \mathbb{R}^k$ pontban l ? (Mindkét definíciót adja meg!)

3. Mondja ki a szorzatfüggvény parciális differenciálhatóságára vonatkozó tételt!

4. Definiálja az $\int_G Q(x,y)\,dy$ vonalmenti integrált!

5. Mondja ki a totális differenciálhatóság feltételét a skaláris hibataggal!

6. Mondja ki az implicitfüggvény-tételt! (Elég a kétváltozós.)

C. További kérdések (3 × 7 pont)

1. Alkalmazza az $\int_0^1(\int_{1-x}^{2-x} f(x,y)\,dx)\,dy$ integrálra az $u = x+y$, $v = x-y$ változótranszformációt!

2. A lemniszkáta („fekvő nyolcas”) egyenlete $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$. Hol van a görbe legmagasabban fekvő pontja?

3. Adjon meg olyan F_n halmazsorozatot, amelyre minden n értékre F_n Jordan szerint mérhető és $F_{n+1} \subseteq F_n$, de $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ Jordan szerint nem mérhető!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!