

VIZSGADOLGOZAT
mat.tanár szak II. évf., 2004. 05. 25.

A. Feladatok

1. Adja meg az $e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ függvény szélsőértékeit! (7 pont)
2. Tekintsük az $\int_0^1 (\int_0^{x^2} f(x, y) dy) dx + \int_1^3 (\int_0^{(3-x)/2} f(x, y) dy) dx$ integrált! Ábrázolja az integrációs tartományt és cserélje föl az integráció sorrendjét! (8 pont)
3. Számolja ki az $\iint_T \frac{x^2}{y^2} dx dy$ integrált, ahol T az $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$ görbék által határolt tartomány! (7 pont)
4. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Igazolja, hogy $\int_G f\left(\frac{y}{x}\right) \frac{x dy - y dx}{x} = 0$ bármely G zárt görbére, amely az $x < 0$ félsíkban halad! (6 pont)
5. Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Bizonyítsa be, hogy f a $(0, 0)$ pontban nem folytonos, de minden $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ esetén $f(t \cdot \mathbf{e}) \rightarrow 0$, ha $t \rightarrow 0$! (9 pont)

6. Integráló tényező segítségével tegye egzakttá és oldja meg az $(x \cos y - y \sin y)y' + (x \sin y + y \cos y) = 0$ differenciálegyenletet! (7 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Mondja ki Jordan tételét!
2. Mit ért az alatt, hogy egy $H \subset \mathbb{R}^2$ halmaz korlátos és zárt?
3. Mit ért az alatt, hogy az f függvény totálisan differenciálható az $A \in \mathbb{R}^k$ pontban?
4. Mondja ki a Darboux-féle tételt kettős integrálra!
5. Mondja ki a vonalintegrál útfüggetlenségének feltételét (a potenciálfüggvényes alakot)!
6. Mondja ki a Young-féle tételt!

C. További kérdések (3 × 7 pont)

1. Fogalmazza meg (pozitív állító alakban), mit jelent az, hogy egy tartomány *nem* csilagszerű!
2. Számolja ki az $\iint_D [x + y] dx dy$ integrált, ahol D a $0 \leq x, y \leq 2$ tartomány és $[\cdot]$ az egészrész-függvény!
3. Adjon (minél pontosabb) becslést a „ $\frac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, ha $|x|, |y|$ kicsi” formula hibájára!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!