

VIZSGADOLGOZAT
mat.tanár szak II. évf., 2004. 05. 18.

A. Feladatok

1. Adja meg a $\sin x \sin y \sin(x + y)$ függvény szélsőértékeit a $0 < x, y < \pi$ tartományon! (9 pont)
2. Számolja ki az alábbi vonalmenti integrálokat! (5 + 6 pont)
 - a) $\int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, ahol L az $y = x^2$ parabola $-1 \leq x \leq 1$ íve
 - b) $\int_L (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy$, ahol L az $y = x^3$ görbe $-1 \leq x \leq 1$ íve
3. Számolja ki az

$$\int_0^{\pi/2} \left(\int_{\cos x}^1 y^4 dy \right) dx$$

integrált, ábrázolja az integrációs tartományt és cserélje föl az integráció sorrendjét! (9 pont)

4. Számolja ki az

$$\iint_T \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right) dx dy$$

integrált, ahol T az $x \leq y \leq -x$, $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ tartomány! (9 pont)

5. Integráló tényező segítségével tegye egzakttá és oldja meg az $xy^2 + y - xy' = 0$ differenciálegyenletet! (7 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit ért az alatt, hogy egy nyílt tartomány összefüggő?
2. Mondja ki az egymásba skatulyázott zárt halmazokról szóló tételt!
3. Mit ért az alatt, hogy egy kvadratikus alak negatív szemidefinit?
4. Mit ért az alatt, hogy az $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $A \in D_f$ pontban az \mathbf{e} irány szerint differenciálható?
5. Mondja ki az implicitfüggvény-tételt!
6. Definiálja az $\int_L Q(x, y) dy$ vonalintegrált! (Itt L egyszerű rektifikálható ív és Q az L -en értelmezett függvény.)

C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Tekintsük az $\iint_D f(x, y) dx dy$ integrált, ahol D az $a \leq x \leq b$, $\alpha x \leq y \leq \beta x$, $0 < a, b, \alpha, \beta$ tartomány. Alkalmazza az integrálra az $u = x$, $v = \frac{y}{x}$ transzformációt!
2. Távfagsdefinió-e \mathbb{R} -en a $d(x, y) := \left| \frac{1}{2x} - \frac{1}{2y} \right|$ függvény?
3. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ az A pontban totálisan differenciálható. Igaz-e, hogy a $g(\mathbf{e}) := f'_\mathbf{e}(A)$ függvény az egységkörön folytonos? Milyen határok közt változik az értéke?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!