

**VIZSGADOLGOZAT**  
mat.tanár szak II. évf., 2004. 01. 20.

**A. Feladatok**

1. Határozza meg az  $y^2 = 4x$  és az  $x^2 = 4y$  görbék által határolt korlátos zárt síkrész területét! (8 pont)

2. Számolja ki az alábbi integrált: (9 pont)

$$\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$$

3. Oldja meg az  $xy' - \frac{y}{x+1} - x = 0$  differenciálegyenletet! (9 pont)

4. Hol konvergens az alábbi függvénysor? Hol abszolút konvergens? Hol egyenletesen konvergens? (10 pont)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 x^2}}{n^2}$$

5. Hol konvergens az alábbi függvénysor? Mi az összege? (9 pont)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

**B. Definíciók, tételek**

(6 × 4 pont)

1. Mondja ki a hányadoskritériumot! (Mindkét alakban, tehát a  $\overline{\lim}$ -os, és a limest nem tartalmazó alakot is)!
2. Mit ért az alatt, hogy két függvény lineárisan független  $[a, b]$ -n?
3. Mondja ki a függvénysorozat határfüggvényének integrálhatóságáról szóló tételt!
4. Mondja ki a hatványsor tagonkénti differenciálhatóságáról szóló tételt!
5. Definiálja a Dirichlet-féle magfüggvényt!
6. Mondja ki a Mertens tételt!

**C. További kérdések**

(3 × 7 pont)

1. Legyen az  $f(x) := (x - \frac{\pi}{2})^2$  a  $[-\pi, \pi]$ -n, és  $f$   $2\pi$ -periodikus. Hová konvergál az  $f$  Fourier-sora a  $\pi$ -ben?

2. Mi az összege az alábbi sornak?

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + + + - - - \dots$$

3. Vázlatosan ábrázolja az  $r = \sin^2 \frac{\varphi}{3}$  poláregyenletű görbét!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!