

VIZSGADOLGOZAT
mat.tanár szak II. évf., 2004. 01. 13.

A. Feladatok

1. Határozza meg az $y^2 = x^2(1 - x^2)$ görbe x tengely körüli forgatásakor kapott korlátos zárt test térfogatát! (8 pont)
2. Számolja ki az alábbi integrált: (8 pont)

$$\int_0^1 \frac{e^{-1/x}}{x^3} dx$$

3. Oldja meg az $y'' = y' + x$ differenciálegyenletet! (8 pont)
4. Konvergens-e, abszolút konvergens-e az alábbi sor: (9 pont)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

5. Hol konvergensek az alábbi függvénysorok? Mi az összegük? (6 + 6 pont)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\log x)^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} (nx)^n$

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mondja ki a Dirichlet-féle konvergenciakritériumot!
2. Definiálja az egyszerű görbeív fogalmát!
3. Mit ért az alatt, hogy az f_n függvénysorozat egyenletesen konvergens?
4. Mondja ki a Riemann lemmát!
5. Mondja ki a hatványsor tagonkénti differenciálhatóságáról szóló tételt!
6. Mondja ki a Cauchy–Hadamard tételt!

C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Legyen az $f(x) := 1 - \sqrt[3]{x}$ a $[-\pi, \pi]$ -n, és f 2π -periodikus. Konvergens-e az f Fourier-sora a 0-ban?
2. Mi az összege az alábbi sornak?

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + + - \dots$$

3. Van-e az $y'' + 4y' - 5y = 0$ differenciálegyenletnek olyan megoldása, ami nem azonosan 0 és az egész \mathbb{R} -en korlátos?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!