

VIZSGADOLGOZAT
mat.tanár szak II. évf., 2004. 01. 06.

A. Feladatok

1. Határozza meg az $x^2 + y^2 = 8$ és az $y = \frac{1}{2}x^2$ egyenletű görbék által határolt mindkét korlátos zárt tartomány területét! (8 pont)
2. Számolja ki az alábbi integrált: (8 pont)

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}} dx$$

3. Oldja meg az $y' = \frac{x+y-2}{y-x+4}$ differenciálegyenletet! (8 pont)
4. Konvergensek-e, abszolút konvergensek-e az alábbi sorok: (8 + 7 pont)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2} \frac{1}{\log n}$

5. Hol konvergens az alábbi függvénysor? (6 pont)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + \sqrt{n}}$$

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Mondja ki a gyökkritériumot! (mindkét alakban, tehát a $\overline{\lim}$ -os, és a limest nem tartalmazó alakot is)!
2. Mit ért az alatt, hogy egy görbeív rektifikálható?
3. Mit ért az alatt, hogy a $\sum a_n$ sor összege s ?
4. Mit ért az alatt, egy függvény Lipschitz-feltételnek tesz eleget az a pontban?
5. Mi állíthat két függvény lineáris függőségéről, ha tudja, hogy Wronsky determinánsuk 0 az $[a, b]$ intervallumon?
6. Mondja ki a függvénysorozat határfüggvényének folytonosságáról szóló tételt!

C. További kérdések (3 × 7 pont)

1. Igaz-e, hogy ha a $\sum a_n$ sor konvergens, akkor a $\sum a_n^2$ sor is szükségképpen konvergens?
2. Van-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$$

sornak olyan átrendezése, amelynek összege 2004?

3. Igaz-e, hogy az $y'' + 7y = 0$ differenciálegyenlet minden megoldása korlátos?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!