

VIZSGADOLGOZAT
mat.tanár szak II. évf., 2003. 12. 30.

A. Feladatok

1. Határozza meg az $y^2 = x(x-1)^2$ egyenletű görbe által határolt korlátos zárt tartomány területét! (7 pont)

2. Számolja ki az alábbi integrált: (7 pont)

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx$$

3. Oldja meg az $y' = (x+y)^2$ differenciálegyenletet! (8 pont)

4. Konvergensek-e, abszolút konvergensek-e az alábbi sorok: (9 + 8 pont)

$$\text{a) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \log \frac{n+1}{n-1} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2n\pi}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

5. Hol konvergens az $f_n(x) := x^{2n} - x^n + 1$ függvénysorozat? Mi a határfüggvénye? (6 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Mondja ki az integrálkritériumot!
2. Definiálja az f függvény Fourier-sorát!
3. Mit ért az alatt, hogy a $\sum a_n$ sor Fejér értelemben szummálható?
4. Mit ért az alatt, hogy két függvény lineárisan független (a, b) -n?
5. Hogyan írhatjuk fel egy $y'' + ay = 0$ típusú differenciálegyenlet két lineárisan független megoldását? (a konstans paraméter.)
6. Mondja ki a függvénysorozat határfüggvényének integrálhatóságáról szóló tételt!

C. További kérdések (3 × 7 pont)

1. Legyen az $f(x) := \sqrt{|x|}$ a $[-\pi, \pi]$ -n, és f 2π -periodikus. Konvergense-e az f Fourier-sora a π -ben?
2. Igaz-e, hogy ha $\forall p \geq 1, \forall \varepsilon > 0$ esetén van olyan ν , hogy

$$\forall n > \nu : \left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon,$$

akkor a $\sum a_n$ sor szükségképpen konvergens?

3. Vázlatosan ábrázolja az $r = e^\varphi$ poláregyenletű görbét! Igaz-e, hogy a görbét az origóból kétszeresére nagyítva az eredetivel egybevágó görbét kapunk?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!