VIZSGADOLGOZAT

mat.tanár szak II. évf., 2003. 12. 23.

A. Feladatok

1. Határozza meg az $r = 2\varphi$ poláregyenletű görbe $0 \leq \varphi \leq \pi$ ívének hosszát! (8 pont)
2. Számolja ki az alábbi integrált: (7 pont)

$$\int_0^1 \frac{\log(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

3. Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet: (8 pont)

$$xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y.$$

4. Konvergensek-e, abszolút konvergensek-e az alábbi sorok: (7 + 9 pont)

$$\text{a)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\sin n)(\log n)}{n^3} \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

5. hol konvergens az alábbi hatványsor? Mi az összege? (6 pont)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n x^n}{2^{3n}}$$

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mondja ki a hányadoskritériumot (mindkét alakban, tehát a $\overline{\lim}$-os, és a limest nem tartalmazó alakot is)!
2. Mondja ki a lokalizációs tételt!
3. Mit ért azalatt, hogy az f_n függvénysorozat egyenletesen konvergens?
4. Hogyan állítható elő egy másodrendű lineáris differenciálegyenlet összes megoldása?
5. Definiálja egy egyszerű görbeív ívhosszát!
6. Mondja ki a Cauchy–Hadamard tételt!

C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Legyen az $f(x) := \sqrt{|x|}$ a $[-\pi, \pi]$-n, és f 2π-periodikus. Konvergens-e az f Fourier-sora a 0-ban?
2. Igaz-e, hogy ha $na_n \to 0$ (ha $n \to \infty$), akkor a $\sum a_n$ sor szükségképpen konvergens?
3. Vázlatosan ábrázolja az $r = e^{\varphi}$ poláregyenletű görbét! Igaz-e, hogy a görbét az origóból kétszeresére nagyítva az eredetivel egybevágó görbét kapunk?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!