VIZSGADOLGOZAT

mat.tanár szak I. évf., 2003. 06. 19.

A. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvények egy primitív függvényét: (3 × 8 pont)

$$\text{a)}\quad \ln(x+\sqrt{1+x^2}\,) \qquad \text{b)}\quad \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \qquad \text{c)}\quad \frac{1}{(\operatorname{tg} x+1)\sin^2 x}$$

2. Adja meg az

$$f(x) := \sqrt[3]{(1+x)^2} - \sqrt[3]{(1-x)^2}$$

függvény értékkészletét és monotonitási intervallumait! (8 pont)

3. Végezze el az

$$f(x) := (2+x^2)e^{-x^2}$$

függvény teljes diszkusszióját! (13 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mondja ki a differenciálható függvény szigorú minimuma létezésének szükséges, illetve elegendő feltételeit (az első derivált segítségével)!

2. Mondja ki a középérték-tételt (a Cauchy-féle alakban)!

3. Mondja ki a Taylor-formulát!

4. Mondja ki a parciális integrálás formuláját (a primitív függvényre és a Riemann-integrálra vonatkozót is)!

5. Mit ért azalatt, hogy az f függvény az $[a, b)$-n improprius értelemben integrálható? (Elég a „jobboldali alapeset”.)

6. Mondja ki az integrálhatóság Riemann-féle szükséges és elégséges feltételét!

C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Van-e olyan függvény, ami értelmezési tartományán differenciálható, $\forall x \in D_f$-re $f'(x) > 0$, de f nem szigorúan növő D_f-en?

2. Legyen f az $[\alpha, \beta]$-n folytonos, az (α, β)-n differenciálható függvény. Igaz-e, hogy bármely $\xi \in (\alpha, \beta)$ esetén van olyan $[a, b] \subseteq [\alpha, \beta]$, amelyre $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$?

3. Legyen f folytonos a $[0, 1]$-en, és jelölje B_n, illetve B_{2^k} a $[0, 1]$ intervallum n, illetve 2^k egyenlő részre való beosztását. Állíthatjuk-e az $\underline{s}(f, B_n)$, illetve $\underline{s}(f, B_{2^k})$ sorozatok valamelyikéről, hogy szükségképpen konvergens és/vagy korlátos?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!