VIZSGADOLGOZAT

mat.tanár szak I. évf., 2003. 06. 12.

A. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvények egy primitív függvényét: (7 + 8 + 8 pont)

a) $\dfrac{1}{3+5\cos x}$ b) $\dfrac{x}{(2x^2+x-1)(x^2+1)}$ c) $e^x \sin x + \sin^4 x$

2. Igazolja, hogy $0 < x < \frac{\pi}{2}$ esetén $x + \frac{x^3}{3} < \operatorname{tg} x$! (8 pont)

3. Végezze el az

$$f(x) := \frac{x}{\sqrt[3]{2-x^2}}$$

függvény teljes diszkusszióját! (14 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit ért azalatt, hogy az $\langle a, b\rangle$ intervallumon az f konkáv?

2. Mondja ki a Newton–Leibnitz formulát (az I. alakban, tehát amikor f integrálhatóságát tettük fel)!

3. Mondja ki a differenciálható függvény szigorú lokális maximuma létezésének szükséges, ill. elegendő feltételeit (az első derivált segítségével)!

4. Modja ki a helyettesítéses integrál formuláját (a primitív függvényre és a Riemann-integrálra vonatkozót is)!

5. Mondja ki az improprius integrálra vonatkozó majoráns kritériumot!

6. Mondja ki a függvények összetételének integrálhatóságáról szóló tételt!

C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Legyen f az $[1, \infty)$-en differenciálható, monoton csökkenő és tudjuk, hogy $f(x) \to 0$, ha $x \to \infty$. Igaz-e, hogy mindig létezik olyan $x_n \to \infty$ sorozat, amelyre $f'(x_n) \to 0$, ha $n \to \infty$?

2. Legyen f folytonos $[a, b]$-n. Igaz-e, hogy ha $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$, akkor szúkségképpen minden x-re $f(x) = 0$?

3. Legyen f egy legalább másodfokú polinom, $f(0) = 0$, $f(2) = 2$. Igaz-e, hogy mindig van olyan $0 < \xi < 2$, amelyre $f'(\xi) < 1$?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!