

VIZSGADOLGOZAT
mat.tanár szak I. évf., 2003. 06. 05.

A. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvények egy primitív függvényét: (7 + 8 + 10 pont)

a) $\frac{x \cos x}{\sin^3 x}$ b) $\frac{2x^3 + 3x}{x^4 + x^2 + 1}$ c) $\frac{1}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}}$

2. Igazolja, hogy $x > 0$ esetén $1 + 2 \ln x \leq x^2!$ (7 pont)

3. Végezze el az

$$f(x) := \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$$

függvény teljes diszkusszióját! (13 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit ért az alatt, hogy egy függvénynek az a pontban $-+$ jelváltása van?
2. Mondja ki a Taylor-formulát!
3. Mondja ki a differenciálható függvény szigorú monoton csökkenésének szükséges, ill. elegendő feltételeit (az első derivált segítségével)!
4. Mondja ki az integrálfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
5. Mondja ki a Cauchy–Bunyakovszkij egyenlőtlenséget!
6. Mondja ki az integrálható függvények hányadosának integrálhatóságáról szóló tételt!

C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Legyen f integrálható $[a, b]$ -n, B_n az $[a, b]$ egy beosztása. Igaz-e, hogy

$$\left| \underline{s}(f, B_n) - \int_a^b f \right| < 10^{-4},$$

ha n elég nagy?

2. Legyen $h > -1$. Az α paraméter mely értékeire igaz, hogy $(1+h)^\alpha \leq 1+h\alpha$?

3. A p paraméter mely értékeire létezik az $\int_1^\infty x^p dx$ integrál?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!