VIZSGADOLGOZAT

mat.tanár szak I. évf., 2003. 05. 22.

A. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvények egy primitív függvényét: (9 + 8 + 6 pont)

a) $\dfrac{1}{\sin x - \cos x + 1}$ b) $\operatorname{arctg}(1+\sqrt{x}\,)$ c) $e^x \sin 2x$

2. Legyen

$$f(x) := \frac{\sin(x+2)}{\sin(x+1)}\,.$$

Vizsgálja a függvény monotonitását, adja meg az értékkészletét és az esetleges szélsőértékeket! (9 pont)

3. Végezze el az

$$f(x) := \frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$$

függvény teljes diszkusszióját! (13 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mondja ki a középértéktétel Lagrange-féle alakját!

2. Mondja ki a L'Hospital szabályt (az $x \to a+0$, $g(x) \to \infty$ alakot)!

3. Mondja ki a differenciálható függvény szigorú maximuma létezésének szükséges, ill. elegendő feltételeit (az első derivált segítségével)!

4. Mondja ki a Newton–Leibniz formulát (az I. alakban, tehát amelyikben f integrálhatóságát tettük fel)!

5. Mondja ki az oszcillációs kritériumot!

6. Definiálja az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény integrálfüggvényét!

C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Legyen az f függvény szigorúan monoton és konvex (a,b)-n. Igaz-e, hogy az inverze szükségképpen konkáv?

2. Van-e olyan f függvény, amelynek a) minden alsó és felső összege egyben Riemann-összeg is, b) minden Riemann-összege egyben alsó vagy felső összeg is?

3. Van-e olyan f függvény, amely a (véges) $[a,b]$-n nemnegatív, integrálható, $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, mégis végtelen sok pontban $f(x) > 0$?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!