

VIZSGADOLGOZAT
mat.tanár szak I. évf., 2003. 05. 15.

A. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvények egy primitív függvényét: (10 + 8 + 6 pont)

a) $\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$ b) $\frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$ c) $\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$

Igazolja, hogy a $[-1, 1]$ intervallumon igaz, hogy

$$\sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{1}{2}x.$$

Legfeljebb mekkora lehet a két oldal eltérése? (8 pont)

3. Végezze el az

$$f(x) := \frac{x^3}{3-x^2}$$

függvény teljes diszkusszióját! (13 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit ért az alatt, hogy az f függvény a -ban differenciálható?
2. Mondja ki a L'Hospital szabályt (az $x \rightarrow a + 0$, $g(x) \rightarrow \infty$ alakot)!
3. Mondja ki a differenciálható függvény szigorú minimuma létezésének szükséges, ill. elegendő feltételét (az első derivált segítségével)!
4. Mondja ki az integrál linearitásáról szóló tételt!
5. Mondja ki az oszcillációs kritériumot!
6. Mondja ki a helyettesítéses integrálás formuláját (mindkét alakot, tehát a primitív függvényről és a Riemann-integrálról szólót is)!

C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Adjon példát olyan differenciálható függvényre, amelynek valamely a pontban szigorú szélsőértéke van, de a deriváltja a -ban nem vált előjelet!
2. Van-e olyan f függvény, amelynek a) minden alsó és felső összege egyben Riemann-összeg is, b) minden Riemann-összege egyben alsó vagy felső összeg is?
3. Igaz-e, hogy ha létezik az $\int_1^\infty f(x) dx$ improprius integrál, akkor szükségképpen $f(x) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!