

VIZSGADOLGOZAT
mat.tanár szak I. évf., 2003. 01. 23.

A. Feladatok

1. Legyen

$$f(x) := \arcsin \frac{1}{|x|} + \log_2(5 - x^2).$$

Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (9 pont)

2. Számolja ki az alábbi határértékeket: (6 + 5 + 5 pont)

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n + \sqrt[3]{1 - n^3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right]$

3. Legyen

$$f(x) := \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x}.$$

Hol folytonos ez a függvény? Határozza meg a jellegzetes limeseit, vázlatosan ábrázolja! (13 pont)

4. Legyen $f(x) := \operatorname{tg} x$, $g(x) := \arcsin \operatorname{tg} x$. Ábrázolja az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényeket! (7 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az f függvény határértéke a $-\infty$ -ben c ? (Mindkét definíciót adja meg!)
2. Mondja ki a inverzfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
3. Mit ért az alatt, hogy az f függvény folytonos az $\langle a, b \rangle$ intervallumon?
4. Mondja ki az intervallumon monoton növekedő függvények differenciálhányadosáról szóló tételt!
5. Mit ért az alatt, hogy az a_n sorozat $-\infty$ -divergens?
6. Definiálja az $\sqrt[n]{x}$ függvényeket, ahol n páros egész szám!

C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Van-e olyan függvény, amely egyetlen intervallumban sem jeltartó és egy pontban sem jelváltó?
2. Legyen a_n olyan sorozat, amelyre $a_{n+p} - a_n \rightarrow 0$ valamely $p > 0$ értékre. Következtethetünk-e arra, hogy a_n konvergens?
3. Fogalmazza meg (pozitív állító formában), mit jelent az, ha az f függvény *nem* egyenletesen folytonos az (a, b) intervallumon! (Feltehetjük, hogy $(a, b) \subseteq D_f$.)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók.

Jó munkát!