

VIZSGADOLGOZAT
mat.tanár szak I. évf., 2003. 01. 15.

A. Feladatok

1. Legyen $f(x) := \arccos(3 - x^2) + \log_9(2x - 1)$. Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (10 pont)

2. Számolja ki az alábbi határértékeket: (8 + 7 pont)

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{1/x}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})$

3. Legyen

$$f(x) := \log_{1/3} \frac{x+3}{x-2}.$$

Hol folytonos ez a függvény? Határozza meg a jellegzetes limeseit, értékkészletét, vázlatosan ábrázolja! (14 pont)

4. Definíció szerint (küszöbszámkereséssel) igazolja, hogy $(\frac{1}{3})^n + (\frac{1}{4})^n \rightarrow 0$! (6 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az f függvény baloldali határértéke az a helyen $-\infty$? (Mindkét definíciót adja meg!)

2. Mondja ki az inverzfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!

3. Mondja ki a folytonos függvények fokozatos változásáról szóló tételt!

4. Mit jelent az, hogy az α szám torlódási pontja az (a_n) sorozatnak?

5. Definiálja a 2^x ($x \in \mathbb{R}$) függvényt!

6. Mit jelent az, hogy az f függvénynek az a helyen $+-$ jelváltása van?

C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Legyen $a_n \rightarrow a$ és $b_n \rightarrow b$ két konvergens sorozat. Tudjuk, hogy $\forall n > 2003$ esetén $0 < a_n < b_n$. Lehetséges-e, hogy $\frac{b_n}{a_n} \rightarrow q \leq 1$?

2. Igaz-e, hogy ha az f függvény folytonos a -ban, akkor a $g(x) := (x - a)f(x)$ függvény szükségképpen differenciálható?

3. Pozitív állító formában fogalmazza meg a (sorozatokra vonatkozó) Cauchy-kritériumban szereplő feltétel tagadását!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók.

Jó munkát!