

VIZSGADOLGOZAT
mat.tanár szak I. évf., 2003. 01. 09.

A. Feladatok

1. Legyen $f(x) := \sqrt{\sin(\arccos(1 - 2x))}$. Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (10 pont)
2. Számolja ki az alábbi határértékeket: (8 + 7 pont)

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \operatorname{tg} x}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^n$

3. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{2 - 2^{\operatorname{tg} x}}.$$

- Hol folytonos ez a függvény? Határozza meg a jellegzetes limeseit, értékkészletét, vázlatosan ábrázolja! (14 pont)
4. Definíció szerint (küszöbszámkereséssel) igazolja, hogy

$$\frac{n^3 - 5n + 4}{n^2 - 4n + 5} \rightarrow \infty! \quad (6 \text{ pont})$$

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az f függvény folytonos az a helyen? (Mindkét definíciót adja meg!)
2. Mondja ki az összetett függvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
3. Mit jelent az, hogy az f függvény Bolzano–Darboux tulajdonságú az I intervallumon?
4. Definíálja egy számhalmaz infimumát (a formális definíciót adja meg)!
5. Definíálja az $\arccos x$ függvényt!
6. Mit ért az alatt, hogy az f függvénynek az a helyen lokális maximuma van?

C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Adjon példát két olyan nem folytonos függvényre, melyek összetétele folytonos!
2. Az a_n sorozatról tudjuk, hogy konvergens, és minden n -re $a_n > 0$. Lehetséges-e, hogy az $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sorozat nem konvergens?
3. Mit jelent az, hogy egy f függvény *nem* egyenletesen folytonos az $I \subset D_f$ intervallumon? (Pozitív állító formában fogalmazza meg!)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók.

Jó munkát!