

VIZSGADOLGOZAT
mat.tanár szak I. évf., 2003. 01. 02.

A. Feladatok

1. Legyen $f(x) := \sqrt{\arcsin(x+3-|x+2|)}$. Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (10 pont)
2. Számolja ki az alábbi határértékeket: (8 + 5 pont)

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - n^2 \cos \frac{1}{n}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{\pi}{x}$

3. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{1 + e^{1/(1-x)}}$$

- Hol folytonos ez a függvény? Határozza meg a jellegzetes limeseit, vázlatosan ábrázolja, adja meg az értékkészletet! (15 pont)
4. Definíció szerint (küszöbszámkereséssel) igazolja, hogy $\frac{n}{3^n} \rightarrow 0$! (7 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az f függvény differenciálhányadosa az a helyen q ?
2. Mondja ki a folytonos függvények hányadosáról szóló tételt!
3. Definiálja az f és g függvények $f(g)$ összetételét!
4. Definiálja az a^x ($a > 0$) függvényt!
5. Mit jelent az, hogy az f függvény baloldali határértéke az a -ban c ? (Mindkét definíciót adja meg!)
6. Mit jelent az, hogy az x_n sorozatnak az α szám torlódási pontja?

C. További kérdések (3 × 7 pont)

1. Egy függvényről tudjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} = 0.$$

- Igaz-e, hogy a függvény szükségképpen differenciálható?
2. Legyen az f függvény szigorúan monoton, és az a pont egy környezetében értelmezett. Lehetséges-e, hogy f nem differenciálható az a pontban, de az inverze differenciálható $f(a)$ -ban?
 3. Pozitív állító formában fogalmazza meg a (sorozatokra vonatkozó) Cauchy-kritériumban szereplő feltétel tagadását!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók.

Jó munkát!