

VIZSGADOLGOZAT
mat.tanár szak I. évf., 2002. 12. 27.

A. Feladatok

1. Legyen $f(x) := \arccos(\log_2(1 - x^2))$. Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (10 pont)
2. Számolja ki az alábbi határértékeket: (7 + 7 pont)

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{1/x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5 + x}}{1 - \sqrt{5 - x}}$

3. Legyen

$$f(x) := \log\left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}\right).$$

Hol folytonos ez a függvény? Határozza meg a jellegzetes limeseit, vázlatosan ábrázolja! (14 pont)

4. Legyen $f(x) := \operatorname{tg} x$, $g(x) := \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$. Ábrázolja az $f(g)$ és $g(f)$ függvényeket! (7 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az f függvény határértéke l a $-\infty$ -ben? (Mindkét definíciót adja meg!)
2. Mondja ki az inverzfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
3. Mondja ki a korlátos zárt intervallumon folytonos függvény szélsőértékeiről szóló tételt!
4. Definálja egy számhalmaz infimumát (a formális definíciót adja meg)!
5. Definálja az $\sqrt[n]{x}$ függvényeket!
6. Mit ért az alatt, hogy az f függvénynek az a helyen lokális minimuma van?

C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Van-e a $(\sin n)^n$ sorozatnak konvergens részsorozata?
2. Adjon példát olyan függvényre, amely a $(0, 1)$ intervallumon folytonos, de nem rendelkezik az első és utolsó elérési tulajdonsággal!
3. Mit jelent az, hogy egy f függvény *nem* folytonos az a helyen? (Pozitív állító formában fogalmazza meg, "epszilonos" alakban! Feltehetjük, hogy $\exists I_a : I_a \subset D_f$.)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók.

Jó munkát!