

## VIZSGADOLGOZAT

mat. alapszak I. évf. levelező, 2008. 01. 25.

### A. Feladatok

1. Legyen

$$f(x) := \log_{1/3} \sqrt{\frac{3x-9}{x-2}}.$$

Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét, jellegzetes limeseit, vázlatosan ábrázolja! (14 pont)

2. Számolja ki az alábbi határértékeket: (8+7 pont)

$$\text{a) } \frac{1 - \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg} x}}{x} \quad (x \rightarrow 0) \quad \text{b) } \sqrt[n]{\frac{5^n - 4^n + 3^n}{n^5 - n^4 + n^3}} \quad (n \rightarrow \infty)$$

3. Legyen  $f(x) := x^{2n} - x^n + 1$ . Hol konvergens ez a függvénysorozat? Mi a határfüggvénye? (8 pont)

4. Hol konvergens a  $\sum_{n=1}^{\infty} (\log_{1/2} x)^n$  függvénysor? Mi az összege? (9 pont)

### B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az  $f$  függvény balról folytonos az  $a$  helyen? (Mindkét definíciót adja meg!)
2. Definálja egy számhalmaz supremumát (a formális definíciót adja meg)!
3. Mit jelent az, hogy az  $\sum a_n$  sor konvergens?
4. Mondja ki a hányadoskritériumot (mindhárom alakban)!
5. Mondja ki a Cauchy–Hadamard tételt!
6. Mondja ki a feltételesen konvergens sorok átrendezhetőségéről szóló tételt!

### C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Legyen  $x_1 := 1$ ,  $x_{n+1} := x_n + \frac{1}{x_n}$ . Konvergens-e ez a sorozat?
2. Mit jelent az, hogy az  $f$  függvény *nem* egyenletesen folytonos az  $(a, b) \subseteq D_f$  intervallumon? (Pozitív, állító formában fogalmazza meg!)
3. Adjon példát olyan függvényre, amely rendelkezik a Bolzano–Darboux tulajdonsággal, de nem folytonos!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!