VIZSGADOLGOZAT

mat. alapszak I. évf. levelező, 2008. 01. 18.

A. Feladatok

1. Adja meg az $f(x) := \arcsin(\log_2(x^2 - 1))$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (8 pont)

2. Számolja ki az alábbi határértékeket: (7 + 8 + 7 pont)

a) $\dfrac{n \operatorname{arc\,tg} n}{n^2 - 3}$ $(n \to \infty)$ b) $\sqrt[n]{\dfrac{5^n - n \cdot 3^n}{2n^2 + n}}$ $(n \to \infty)$ c) $\dfrac{3 - \sqrt{5 + x}}{1 - \sqrt{5 - x}}$ $(x \to 4)$

3. Konvergens-e a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ sor? (7 pont)

4. Hol konvergens a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n} x^n$ sor? (8 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az f függvény baloldali határértéke az a helyen ∞? (Mindkét definíciót adja meg!)

2. Mit jelent az, hogy az f függvény az (a, b) intervallumon Bolzano–Darboux tulajdonságú?

3. Definiálja adott f függvény inverzét!

4. Mondja ki a majoránskritériumot!

5. Mondja ki a Cauchy–Hadamard tételt!

6. Mondja ki a Bolzano–Weierstrass tételt!

C. További kérdések (3 × 7 pont)

1. Egy (a_n) sorozatról tudjuk, hogy bármely $p \geq 1$ egész értékre $a_{n+p} - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Igaz-e, hogy a sorozat szükségképpen konvergens?

2. Adott két konvergens sorozat: $a_n \to a$, $b_n \to b$ és tudjuk, hogy minden n értékre $a_n < b_n$. Lehetséges-e, hogy $a \geq b$?

3. Ábrázolja az $\arcsin(\sin x)$ és a $\sin(\arcsin x)$ függvényeket!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!