

VIZSGADOLGOZAT

mat. alapszak I. évf. levelező, 2008. 01. 04.

A. Feladatok

1. Számolja ki az

$$\text{a) } \sqrt[n]{\frac{n^3 + 3}{4n^2 - 5}} \quad \text{b) } \frac{1}{n+1} \operatorname{ctg} \frac{1}{n}$$

sorozatok határértékét! (7+5 pont)

2. Számolja ki az $x(\sqrt{x^2 - 1} + x)$ függvény $x \rightarrow -\infty$ határértékét! (8 pont)

3. Konvergens-e, abszolút konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+n+1}$ sor? (7 pont)

4. Hol konvergens a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$ sor? (7 pont)

5. Legyen $f(x) := \frac{x^2-2x}{x^2+x}$. Hol folytonos? Hol monoton? Vizsgálja a jellegzetes limeseket, vázlatosan ábrázolja a függvényt! (11 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az f függvény balról folytonos az a helyen? (Mindkét definíciót adja meg!)

2. Mit jelent az, hogy az f_n függvénysorozat a H halmazon egyenletesen konvergál az f függvényhez?

3. Definiálja az adott f és g függvények $f(g)$ összetételét!!

4. Mondja ki a hányadoskritériumot!

5. Definiálja az arcsin x függvényt!

6. Mondja ki a (számsorozatokra vonatkozó) Cauchy-féle kritériumot!

C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Mutassa meg, hogy az A/5 feladatban szereplő függvény invertálható; adja meg az inverzét (ÉT, ÉK-t is)!

2. Fogalmazza meg (pozitív, állító formában), mit jelent az, hogy az f függvény *nem* egyenletesen folytonos az $I \subset D_f$ intervallumon!

3. Igaz-e, hogy ha egy függvény az (a, b) intervallumon invertálható, akkor szükségképpen szigorúan monoton is?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!