

VIZSGADOLGOZAT

mat. alapszak I. évf. levelező, 2007. 12. 29.

A. Feladatok

1. Adja meg az $f(x) := \arcsin(x + 3 - |x + 2|)$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (8 pont)

2. Számolja ki az

$$\text{a) } \left(\frac{5n-8}{n+7}\right)^{-n} \quad \text{b) } \frac{2^n - 3^{-n}}{3 \cdot 2^n + 3^n}$$

sorozatok határértékét! (6+6 pont)

3. Konvergens-e, abszolút konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+2}}$ sor? (7 pont)

4. Hol konvergens a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n+n^2}$ függvénysor? (8 pont)

5. Legyen $f(x) := (1/3)^{\frac{x-2}{1-x}}$. Hol folytonos? Hol monoton? Vizsgálja a jellegzetes limeseket, vázlatosan ábrázolja a függvényt! (11 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az f függvény jobboldali határértéke az a helyen $-\infty$? (Mindkét definíciót adja meg!)

2. Mit jelent az, hogy az α szám az a_n sorozatnak torlódási pontja?

3. Mit jelent az, hogy az f_n függvénysorozat a H halmazon egyenletesen konvergál?

4. Mondja ki a Leibniz-féle kritériumot!

5. Mondja ki a (sorozatokra vonatkozó) Cauchy-féle kritériumot!

6. Mondja ki a konvergens sorozatok hányadosáról szóló tételt!

C. További kérdések

(4 × 6 pont)

1. Mutassa meg, hogy az A/5 feladatban szereplő függvény invertálható; adja meg az inverzét (ÉT, ÉK-t is)!

2. Fogalmazza meg (pozitív, állító formában), mit jelent az, hogy az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $[a, b]$ intervallumon *nem* egyenletesen folytonos!

3. Hol konvergens a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{3^n}$$

függvénysor?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!