

VIZSGADOLGOZAT
mat. alapszak I. évf., 2007. 01. 12.

A. Feladatok

1. Adja meg az $f(x) := \sqrt{|x+1| - |x-1|}$ függvény értelmezési tartományát és értékészletét! (7 pont)
2. Számolja ki a $\frac{-3x+2}{\sqrt{x^2+5}}$ függvény $x \rightarrow -\infty$ határértékét! (8 pont)
3. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ sor? (7 pont)
4. Hol konvergens a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n} x^n$ sor? (9 pont)
5. Legyen $f(x) := \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$. Hol folytonos? Hol monoton? Vizsgálja a jellegzetes limeseket, vázlatosan ábrázolja a függvényt! (11 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az f függvény határértéke az a helyen $-\infty$? (Mindkét definíciót adja meg!)
2. Mit jelent az, hogy az f függvény az (a, b) intervallumon Bolzano–Darboux tulajdonságú?
3. Definiálja adott f függvény inverzét!
4. Mondja ki a majoránskritériumot!
5. Mondja ki a Cauchy–Hadamard tételt!
6. Mondja ki a Bolzano–Weierstrass tételt!

C. További kérdések (4 × 6 pont)

1. Mutassa meg, hogy az A/5 feladatban szereplő függvény invertálható; adja meg az inverzét (ÉT, ÉK-t is)!
2. Fogalmazza meg (pozitív, állító formában) a (sorozatokra vonatkozó) Cauchy-féle kritériumban szereplő feltétel tagadását!
3. Adott két konvergens sorozat: $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ és tudjuk, hogy minden n értékre $a_n < b_n$. Lehetséges-e, hogy $a \geq b$?
4. Ábrázolja az $\arctg(\tg x)$ és a $\tg(\arctg x)$ függvényeket!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!