

VIZSGADOLGOZAT
mat. alapszak I. évf., 2006. 12. 29.

A. Feladatok

1. Legyen $f(x) := \sqrt{(x+3 - |x+2|)}$. Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (8 pont)

2. Számolja ki az alábbi határértékeket: (7+7 pont)

a) $\sqrt{n}(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})$ ($n \rightarrow \infty$) b) $\frac{x - \sin 2x}{3x + x^{4/3}}$ ($x \rightarrow 0$)

3. Hol konvergens a $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-nx}$ függvénysor? (8 pont)

4. Legyen $f(x) := \frac{1}{2-2^{\lg x}}$. Hol folytonos? Hol monoton? Vizsgálja a jellegzetes limeseket, vázlatosan ábrázolja a függvényt! (12 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az f függvény jobboldali határértéke az a helyen c ? (Mindkét definíciót adja meg!)
2. Definiálja a $H \subset \mathbb{R}$ számhalmaz supremumát (a formális definíciót adja meg)!
3. Definiálja az adott f függvény inverzét!
4. Mondja ki a Leibniz-féle kritériumot!
5. Mondja ki a (sorozatokra vonatkozó) Cauchy-féle kritériumot!
6. Mondja ki a Cauchy–Hadamard tételt!

C. További kérdések (4 × 6 pont)

1. Definíció szerint (küszöbszámkereséssel) igazolja, hogy $(2 + \frac{1}{n})^{-n} \rightarrow 0$!
2. Fogalmazza meg (pozitív, állító formában), mit jelent az, hogy az f függvény *nem* egyenletesen folytonos az $I \subset D_f$ intervallumon!
3. Ábrázolja a $\operatorname{tg}(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)$ és az $\operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)$ függvényeket!
4. Adjon példát olyan sorozatra, amelynek végtelen sok (különböző) torlódási pontja van!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!