12. Fourier-sorok

634. Legyen az f függvény 2π szerint periodikus és $f(x) = x$, ha $-\pi < x \leq \pi$. Írjuk fel a függvény Fourier-sorát!

Megoldás. Tudjuk, hogy a Fourier együtthatókat az

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

képletek adják meg.

Mivel az f páratlan függvény, az $f(x)\cos nx$ is páratlan, így minden n értékre

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0,$$

mert egy páratlan függvény origóra szimmetrikus integrálja mindig 0. A sinus-együtthatókat parciális integrálással számoljuk,

$$\begin{aligned} b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\Big[-x\frac{\cos nx}{n}\Big]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx \\ &= -\frac{2\cos n\pi}{n} = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}, \end{aligned}$$

hiszen $\cos n\pi = (-1)^n$.

Tehát a függvény Fourier-sora

$$f \sim 2\Big(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - + \cdots\Big).$$

635. Legyen az f függvény 2π szerint periodikus és $f(x) = x^2$, ha $-\pi \le x \le \pi$. Írjuk fel a függvény Fourier-sorát!

Megoldás. A függvény páros, tehát minden sinus-együttható eltűnik. A cosinus-együtthatók

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2,$$

továbbá, ha $n \ge 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx.$$

Kétszer parciálisan integrálva

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\Big[x^2\frac{\sin nx}{n}\Big]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx \\ &= \frac{4}{\pi n^2}\Big[x\cos nx\Big]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx = (-1)^n\frac{4}{n^2}, \end{aligned}$$

tehát a Fourier-sor

$$f \sim \frac{\pi^2}{3} - 4\Big(\cos x - \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\cos 3x}{9} - + \cdots\Big).$$

12.1. Megállapodás. Itt és a továbbiakban feltesszük, hogy a szereplő függvények 2π szerint periodikusak. Az esetleges szakadási pontokban a függvényeket bárhogy értelmezhetjük, ez a Fourier-sort nem befolyásolja. Szokásos a szakadási pontokban az $f(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ értelmezés.

Fejtsük Fourier-sorba az alábbi függvényeket!

636.° $f(x) = |x|$, ha $-\pi \le x \le \pi$

637.° $f(x) = x^3$, ha $-\pi < x < \pi$

638.• $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{ha } 0 < x < \pi \end{cases}$

639.° $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \le |x| \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{ha } \frac{\pi}{2} < |x| \le \pi \end{cases}$

640.° $f(x) = x(\pi - x)$, ha $0 \le x \le \pi$ és f páratlan

641.° $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}$, ha $-\pi < x < \pi$

642.° $|\sin x|$

643.° $f(x) = x\sin x$, ha $-\pi \le x \le \pi$

644.° $f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{ha } -\pi < x \le 0, \\ 3x, & \text{ha } 0 \le x < \pi \end{cases}$

645.° $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{ha } -\pi < x \le 0, \\ 0, & \text{ha } 0 \le x < \pi \end{cases}$

646.° $f(x) = e^x$, ha $0 < x < \pi$ és f páratlan

647.• $f(x) = \cos ax$, ha $-\pi < x < \pi$, ahol $a \in \mathbb{R}$ nem egész szám

648.• $f(x) = \arcsin(\sin x)$ **649.°** $f(x) = \arcsin(\cos x)$

650. Hol konvergens a 635. feladatban szereplő függvény Fourier-sora? Hova konvergál? Vizsgáljuk az $x = \pi$ értéket!

Megoldás. Az $x = \pm\pi$ $(+2k\pi)$ pontokat kivéve a függvény mindenütt differenciálható, tehát Fourier-sora konvergens és $f(x)$-hez konvergál.

A $\pm\pi$ pontokban a függvény mindkét oldalról differenciálható, tehát (a „félérintős feltétel" miatt) Fourier-sora a $\pm\pi$ pontokban is konvergál a függvényhez.

Az $x = \pi$ értéket beírva a Fourier-sorba kapjuk, hogy

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{-1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{-1}{9} - + \cdots\right),$$

azaz

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

651.• Helyettesítsük a 635. feladatban kapott sorba az $x = 0$ értékeket! Mit kapunk?

652.• Fejtsük Fourier-sorba az

$$f(x) = \begin{cases} \pi/4, & \text{ha } 0 < x < \pi, \\ -\pi/4, & \text{ha } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

függvényt és számoljuk ki az

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \cdots,$$

$$1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - - + + \cdots,$$

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \cdots$$

sorok összegét!

653.• Konvergensek-e a 634., 636.–649. feladatokban szereplő függvények Fourier-sorai?

Konvergensek-e az alábbi függvények Fourier-sorai?

654.° $f(x) = \begin{cases} p(x), & \text{ha } 0 < x < \pi, \\ q(x), & \text{ha } -\pi < x \le 0, \end{cases}$, ahol p és q polinomok

655.° $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

656.° $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ **657.**° $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$

658. Fejtsük Fourier-sorba az $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$, ha $0 < x < 2\pi$ függvényt! Számoljuk ki a Fourier-együtthatók négyzetösszegét!

Megoldás. A függvényt ábrázolva (2π szerint periodikus!) láthatjuk, hogy páratlan függvény, tehát a cosinus-együtthatók eltűnnek. A sinus-együtthatókat az eddigiekhez hasonlóan számolva,

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin kx \, dx = \frac{1}{k},$$

a függvény Fourier-sora tehát

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Számoljuk ki a függvény négyzetének integrálját!

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 dx = 2 \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 dx = 2 \frac{1}{4} \left[\frac{(\pi - x)^3}{3} (-1) \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{6},$$

tehát

$$\int_0^{2\pi} f^2(x) \, dx = \pi \sum_{k-1}^{\infty} b_k^2.$$

659. Ellenőrizzük az

$$\int_0^{2\pi} f^2(x) \, dx = \pi \Big(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \Big)$$

Parseval-féle formula helyességét az 634., 638., 652. feladatokon!

660.• Számoljuk ki az $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots$ sor összegét!

661.• Mit mondhatunk az f függvény Fourier-együtthatóiról, ha tudjuk, hogy minden x-re $f(x+\pi)=-f(x)$?

662.° Mit mondhatunk az f függvény Fourier-együtthatóiról, ha tudjuk, hogy minden x-re $f(x+\pi)=f(x)$?

663.• Fejtsük Fourier-sorba az

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } -\pi<x<0,\\ \sin x, & \text{ha } 0\le x<\pi\end{cases} \quad \text{és a} \quad g(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } -\pi<x<0,\\ 1-\cos x, & \text{ha } 0\le x<\pi\end{cases}$$

függvényeket!

664. Keressünk a 636.–649. feladatok között olyan Fourier-sorokat, amelyek biztos egyenletesen konvergensek! Mit kapunk, ha tagonként differenciálunk vagy integrálunk?