629. $\operatorname{arc\,tg} 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$, ha $-\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2}$. **631.** $1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$, ahol $x \in (-\infty, \infty)$, az integrál közelítő értéke 1,605. **633.** Csak a 0 helyen.

13.12. Fourier-sorok

636. $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$. **637.** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{12}{k^3} - \frac{2\pi^2}{k}\right) \sin kx$. **638.** A Fourier-sor $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$. Vegyük észre, hogy ez a függvény az 636. feladatban szereplő függvény deriváltja, és a Fourier-sort is megkaphattuk volna „formális deriválással." Ehhez a 636. feladatban szereplő Fourier-sor egyenletes konvergenciáját kellene vizsgálni. **639.** $b_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{1}{2n}$, $b_{2n+1} = (-1)^n \frac{2}{\pi(2n+1)^2}$, $a_n = 0$. **640.** $\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$. **641.** $b_n = \frac{8}{\pi}(-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2-1}$, $a_n = 0$. **642.** A sor $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$. **643.** $1 - \frac{\cos x}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n^2-1}$. **644.** Az együtthatók $a_0 = \frac{5\pi}{2}$, $a_n = \frac{10}{\pi} \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. **645.** $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}$. **646.** $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - (-1)^n e^{\pi}\right) \frac{n \sin nx}{n^2+1}$. **647.** A függvény páros. Használjuk az ismert $\cos kx \cos ax = \frac{1}{2}(\cos(k+a)x - \cos(k-a)x)$ formulát! A Fourier-sor $2 \frac{\sin \pi a}{\pi} \left(\frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{a \cos kx}{k^2 - a^2}\right)$. **648.** Írjuk a függvényt az $f(x) = x$, ha $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, és $f(x) = \pi - x$, ha $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ alakba. A Fourier-sor $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin(2n+1)x$. **649.** Az előző eredményt fölhasználva a Fourier-sor $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x$. ($\arcsin t = \frac{\pi}{2} - \arccos t$.) **651.** Mivel a Fourier-sor mindenütt konvergens, kapjuk, hogy $0 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - + \cdots\right)$, azaz $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$. Ezt az eredményt elemi számolással is megkaphattuk volna: $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - + \cdots = \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) - 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right) = \frac{\pi^2}{6} - 2\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}$. **652.** A Fourier-sort a 638. feladat mintájára számoljuk. A Fourier-sor konvergens (félérintős feltétel!) $f(x)$-hez (a 0, $\pm\pi$ pontokban az $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = 0$ átlaghoz). A Fourier-sor $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$. Helyettesítsük a $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$ értékeket, az összegek rendre $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. **653.** Az itt szereplő függvényekre minden pontban igaz, hogy vagy differenciálhatók, vagy (az esetleges szakadási és töréspontokban) léteznek a féloldali deriváltak (azaz a $\lim(f(x+h) - f(x+0))/h$, $\lim(f(x-h) - f(x-0))/(-h)$, $h > 0$ határértékek. Tehát a Fourier-sorok konvergensek, határértékük $f(x)$, ha f az x-ben folytonos, illetve az $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$

átlag ott, ahol f-nek elsőfajú szakadása van. **654.** Igen, f differenciálható, kivéve esetleg a 0 és $\pm\pi$ helyeket, de ott is (legalábbis) féloldalról differenciálható. **655.** Igen, mert a függvény mindenütt differenciálható. **656.** A Fourier-sor mindenütt konvergens, mert ha $x \neq 0$, a függvény differenciálható, a 0-ban pedig 1 kitevőjű Lipschitz-feltételnek tesz eleget, hiszen $|f(h) - f(0)| \leq |h|$. **657.** A Fourier-sor mindenütt konvergens, a 0-ban 1/3 kitevőjű Lipschitz-feltétel teljesül. **660.** A Parseval-féle formulát alkalmazhatjuk például a 635. feladatban szereplő függvényre, az összeg $\frac{\pi^4}{96}$. **661.** A függvény 2π szerint periódikus, $a_{2n} = b_{2n} = 0$, mert az a_{2n} és b_{2n} kiszámításakor szereplő integrálokban páratlan függvényt integrálunk $(-\pi, \pi]$-n. (Lásd 634. feladat.) **662.** $a_{2n+1} = b_{2n+1} = 0$. **663.** Az f Fourier-sora $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2-1}$. Ez a sor egyenletesen konvergens (hiszen konvergens numerikus majoránsa van), így tagonként integrálhatjuk. A g Fourier-sora $\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{k(4k^2-1)}$. **664.** Például a 642. feladatban szereplő Fourier-sor egyenletesen konvergens, mert konvergens numerikus majoránsa a $\sum \frac{1}{4n^2-1}$ sor. A 0-ban a sor biztosan konvergens, így tagonként differenciálható. Azt kapjuk, hogy az $f(x) = \cos x$, ha $0 < x < \pi$, $f(x+\pi) = f(x)$ függvény Fourier-sora $-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4n^2-1}\sin 2nx$. A 635. feladatban szereplő Fourier-sor is egyenletesen konvergens, tagonként integrálva megmarad az egyenletes konvergencia (a $\sum \frac{1}{n^3}$ lesz a majoráns), így meghatározhatjuk az x^3, x^4, ..., általában a polinomiális képlettel definiált függvények Fourier-sorát.