Feladatok valós fvtan

1) Biz. σ-gyűrűk metszete σ-gyűrű

2) Biz. Def. egy H halmazosztály által generált σ-gyűrű legyen a H összes elemét tartalmazó σ-gyűrű.

a) Biz. ilyen mindig létezik.

b) Tekintsük α) az összes (a,b) intervallum β) az összes $[a,b]$ intervallum γ) az összes $[a,b)$ intervallum által generált σ-gyűrűket (az $\mathbb{R}$-en). Biz. ezek azonosak.

3) Legyen X egy nem megszámlálható halmaz, és legyen $\mu^*(A) = 1$, ha A nem megsz., $\mu^*(A) = 0$, ha A legf. megsz. Biz. μ^* külső mérték! Melyek a mérhető halmazok?

4) Biz. a_n valós sorozat esetén

$$\underline{\lim}\, a_n = \lim_n \inf_{k \geq n} a_k = \sup_n \inf_{k \geq n} a_k,$$

$$\overline{\lim}\, a_n = \lim_n \sup_{k \geq n} a_k = \inf_n \sup_{k \geq n} a_k$$

(kiterj. valós számkörben!)

5) Legyen X nem megsz., és R: ~~[illegible]~~ $(A \subseteq X)$ $A \in R \iff A$ vagy A^c legf. megsz. Biz R ~~külső mérték!~~ σ-gyűrű

6) Legyen ~~[illegible]~~ R egy halmazosztály, $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \in R \iff A$ vagy A^c véges! Biz R gyűrű, de nem σ-gyűrű.

7) Legyen X tetsz, $R = 2^X$, és $x_0 \in X$ rögz.
Legyen $\mu^*(A) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x_0 \in A, \\ 0, & \text{ha } x_0 \notin A. \end{cases}$

Biz. Ez külső mérték! Mik a mérhető halmazok?

8) Legyen az $\mathbb{N}$ összes részhalmazain
$$\mu^*(A) := \overline{\lim} \left(\frac{1}{n} \cdot \text{az } (A \cap \{1,2,\dots n\}) \text{ elemszáma} \right)$$
külső mérték-e?

9) Legyen X, R adott (R σ-gyűrű X-en) és $x_0, \dots x_n \in X$ rögz.,
$\alpha_0, \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$ rögz. Biz.
$$\mu(A) := \sum_{x_k \in A} \alpha_k \quad \text{mérték!}$$

10) n gyerek között fel kell osztani „igazságosan” egy tortát.
Minden gyereknek van egy „mértéke”, amivel a torta részhalmazait méri, ezek különbözhetnek. Hogyan járjunk el?

Feladatok Valós fv-tan

1. Biz. A megszámlálható halmazok 0-mértékűek
2. Egy halmaz 0-mértékű $\iff$ ha $H \subseteq \bigcup J_n$, ahol J_n intervallum, $\sum |J_n| < \infty$ és $\forall x \in H$, $x \in J_n$ ∞ sok n-re
3. Legyen $f: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Biz. az f grafikonja, tehát az $\{(x,y) : x \in \langle a,b\rangle,\ y = f(x)\}$ halmaz $\mathbb{R}^2$-ben 0-mértékű! (kétdimenziós mérték!)
4. Legyen A_n mérhető, $A_{n+1} \subset A_n$ és $\mu(A_n) = \infty$ $\forall n$-re. Lehet-e $\bigcap A_n$ mértéke 0, véges, végtelen?
5. Van-e olyan $A \subseteq \mathbb{R}$ nem korlátos mérhető halmaz, amelyre $0 < \mu(A) < \infty$?
6. Igaz-e, hogy ha A mérhető, $\mu(A) = 0$, akkor $\mu(\bar{A}) = 0$? ($\bar{A}$ az A lezártja)
7. Biz. Ha $A \subseteq \mathbb{R}$, és van olyan $B \subseteq A$ mérhető halmaz, amelyre $\mu(B) = \mu^*(A) < \infty$, akkor A mérhető!
8. Legyen C a Cantor-halmaz. Biz. $C - C = [0,1]$. ($C - C := \{x - y : x, y \in C\}$)
9. Legyen C a Cantor-halmaz, és ha $x \in C$, akkor, ha $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x_k}{3^k}$, $(x_k = 0,1)$, akkor legyen $\varphi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$. Ha $x \in [0,1] \setminus C$, akkor legyen $\varphi(x) := \sup\{\varphi(t) : t < x,\ t \in C\}$. φ a Lebesgue-féle szinguláris fv. %.

Biz. ϕ monoton nő, folytonos $[0,1]$-en, értékkészlete a $[0,1]$, és $\phi(C) = [0,1]$

(10) Legyen r_n a $\mathbb{Q}$ egy sorozatba rendezése, és

$$g(x) := \sum_{r_n < x} \frac{1}{2^n}$$

Biz. g szig. növő, balról folytonos, minden irrac. pontban folytonos, egyetlen rac pontban sem folytonos, $\lim_{-\infty} g(x) = 0$, $\lim_{\infty} g(x) = 1$.

(11) Biz. $\mathbb{R}$ bm. korlátos halmaza külső mértéke véges!
Megfordítható-e az állítás?

Feladatok valós fv.tan. 10.30.

1. Igaz-e, hogy f mérhető $\Leftrightarrow$ f^3 mérhető?
2. Igaz-e, hogy f mérhető $\Rightarrow$ f^2 mérhető? Igaz-e $\Leftarrow$?
3. Igaz-e, hogy ha f mérhető, akkor $\forall c$, $\{x: f(x)=c\}$ mérhető halmaz? Igaz-e az állítás megford.?
4. Legyen f monoton $\mathbb{R}$-en. Mérhető-e?
5. Biz. Ha f mérhető, akkor $\operatorname{sgn} f$ is mérhető!
6. Biz. Ha $f \neq 0$ mérhető, akkor $1/f$ is!
7. Legyen f folytonos $\mathbb{R}$-en. Mérhető-e?
8. Adja meg a $\operatorname{tg} x$; $\operatorname{sgn} \sin x$; x^2; $\operatorname{arctg} x$; függvények (valamelyik típusú) nívóhalmazait!
9. Mutasson példákat az alábbi esetekre:
   a) f_n Riemann-integrálható, f_n monoton nő, $f_n \to f$, de f nem R-integrálható;
   b) f_n kielégíti a Fatou-lemma feltételeit, és $\lim \int f_n$ nem létezik;
   c) " " , és $\lim \int f_n$ létezik, de $\neq \int(\lim f_n)$
10. Igaz-e, hogy ha egy mérhető H halmazon $f_n \rightrightarrows f$ egyenletesen és f_n integrálható (L szerint), akkor
    a) f is integrálható? b) $\int_H f = \lim \int_H f_n$
    c) igazak-e a) vagy b), ha feltesszük, hogy $\mu(H) < \infty$?

---

11. Adjon fv-t, amely $\mathbb{R}$-en pozitív, de a L-integrálja ($\mathbb{R}$-en) véges!
12. Lehet-e, hogy $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) < g(x)$, de $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} g$?
13. Igaz-e, hogy ha $\int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$, akkor szükségképpen $f(x) \to 0$?

(14) Integrálhatók-e Lebesgue szerint:

a) $[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1/\sqrt{x}$ b) $[1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1/x^2$

c) $(0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x} \sin\frac{\pi}{2x}$ d) $(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{\sin x^2}{x^2}$; $g(x) := \frac{\sin x}{x}$

e) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \operatorname{tg} x$ f) $[-1,1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x} \sin\frac{1}{x}$

(15) Adjon példát valós, de nem integrálható fv-re.

(16) Biz.: Ha f intható és $c>0$, akkor

$$\mu(\{x : |f(x)| \geq c\}) \leq \frac{1}{c} \int |f|$$

(17) Biz. Ha f intható, és $\mu(H) < \infty$, ~~akkor~~ és $c>0$, akkor

$$\mu(\{x \in H : |f(x) - \int_H f| \geq c\}) \leq \frac{1}{c^2} \int_H [f - \int_H f]^2$$

(18) Legyen $\mu(H) < \infty$ és tek. a H-n ért. valós értékű intható fv-ek osztályát. Biz.

$$\rho(f,g) := \int_H \frac{|f-g|}{1+|f-g|}$$

egy távolságfv, $\rho(f,g) = 0 \iff f = g$ m.m. H-n. Biz.

$\rho(f_n, f) \to 0 \iff f_n \to f$ mértékben!!