

VIZSGADOLGOZAT
mat.tanár szak I. évf., 2001. 09. 04.

A. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvények egy primitív függvényét: (5 + 7 + 10 pont)

a) $\sin \sqrt[3]{x}$ b) $\frac{1}{\sqrt{-8 - 4x^2 - 12x}}$ c) $\frac{1}{x^3 - 8}$

Igazolja, hogy a $[-1, 1]$ intervallumon igaz, hogy

$$\sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{1}{2}x.$$

Legfeljebb mekkora lehet a két oldal eltérése? (8 pont)

3. Végezze el az

$$f(x) := \frac{x^3}{3-x^2}$$

függvény teljes diszkusszióját! (15 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az f függvény konkáv (a, b) -n?
2. Adja meg a differenciálható függvények szigorú csökkenésének szükséges, ill. elegendő feltételeit az első derivált segítségével!
2. Mondja ki a L'Hospital szabályt (az $x \rightarrow a$, $g(x) \rightarrow \infty$ alakot)!
4. Mondja ki a Darboux tételt!
5. Mondja ki a függvények összetételének integrálhatóságáról szóló tételt!
6. Mondja ki a helyettesítéses integrálás formuláját (mindkét alakot, tehát a primitív függvényre és a Riemann-integrálra vonatkozót is)!

C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Van-e olyan g függvény, amely az a -ban nem differenciálható, de az $f(x) := (x-a)g(x)$ igen?
2. Adja meg az $f(x) := x - |x-3|$ függvény egy primitív függvényét az egész számegegyenesen!
3. Igaz-e, hogy ha létezik az $\int_1^\infty f(x) dx$ improprius integrál, akkor szükségképpen $f(x) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott, egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!