

**VIZSGADOLGOZAT**  
mat.tanár szak I. évf., 2001. 06. 20.

**A. Feladatok**

1. Határozza meg az alábbi függvények egy primitív függvényét: (9 + 6 + 6 pont)

a)  $\frac{1}{\sin x - \cos x + 1}$       b)  $\frac{1}{x\sqrt{x^3 - 1}}$       c)  $e^x \sin^2 x$

2. Legyen

$$f(x) := \frac{\sin(x+1)}{\sin(x+2)}.$$

Vizsgálja a függvény monotonitását, adja meg az értékkészletét és az esetleges szélsőértékeket! (9 pont)

3. Végezze el az

$$f(x) := 4x + 2 - 5 \log(1 + x^2)$$

függvény teljes diszkusszióját! (15 pont)

**B. Definíciók, tételek**

(6 × 4 pont)

1. Mondja ki a középérték-tételt (a Cauchy-féle alakot)!
2. Adja meg a differenciálható függvények szigorú csökkenésének szükséges, ill. elegendő feltételeit az első derivált segítségével!
3. Mondja ki a Taylor-formuláról szóló tételt!
4. Mondja ki az integrál intervallum-additivitására vonatkozó tételt!
5. Mondja ki a függvények összetételének integrálhatóságáról szóló tételt!
6. Mondja ki a parciális integrálás formuláját (mindkét alakot, tehát a primitív függvényre és a Riemann-integrálra vonatkozót is)!

**C. További kérdések**

(3 × 7 pont)

1. Adjon példát olyan differenciálható függvényre, amelynek valamely  $a$  pontban szigorú szélsőértéke van, de a deriváltja  $a$ -ban nem vált előjelet!

2. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} q/(q+1), & \text{ha } x = p/q, \text{ ahol } p, q \text{ egészek, } (p, q) = 1 \text{ és } q > 0, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Integrálható-e  $f$  az  $[1, 2]$ -n?

3. Igaz-e, hogy ha létezik az  $\int_1^\infty f(x) dx$  improprius integrál, akkor szükségképpen  $f(x) \rightarrow 0$ , ha  $x \rightarrow \infty$ ?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!