

VIZSGADOLGOZAT
mat.tanár szak I. évf., 2001. 06. 06.

A. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvények egy primitív függvényét: (8 + 9 + 5 pont)

a) $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ b) $\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$ c) $x \arccos x$

2. Legyen

$$f(x) := \arctg x + \arctg \frac{1-x}{1+x}.$$

Adja meg az f' függvényt! Vázlatosan ábrázolja f -et! (4+4 pont)

3. Végezze el az

$$f(x) := 16x(x-1)^3$$

függvény teljes diszkusszióját! (15 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az f függvény konkáv (a, b) -n?
2. Adja meg a differenciálható függvények szigorú csökkenésének szükséges, ill. elegendő feltételeit az első derivált segítségével!
3. Mondja ki a Taylor formuláról szóló tételt!
4. Mondja ki a Jensen egyenlőtlenséget !
5. Mondja ki a függvények összetételének integrálhatóságáról szóló tételt!
6. Mondja ki a Newton–Leibniz formulát (mindkét alakot, tehát a primitiválható és a folytonos függvényekről szólót is)!

C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Van-e olyan g függvény, amely az a -ban nem differenciálható, de az $f(x) := (x-a)g(x)$ igen?
2. Van-e olyan f függvény, amely a (véges) $[a, b]$ -n nemnegatív, integrálható, $\int_a^b f(x) dx = 0$, mégis végtelen sok pontban $f(x) > 0$?
3. Igaz-e, hogy ha létezik az $\int_1^\infty f(x) dx$ improprius integrál, akkor szükségképpen $f(x) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!