

VIZSGADOLGOZAT
mat.tanár szak I. évf., 2001. 01. 24.

A. Feladatok

1. Legyen

$$f(x) := \sqrt{\log_{(1/2)} \left| \frac{x+2}{x-2} \right|}.$$

Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (11 pont)

2. Számolja ki az alábbi határértékeket: (10 + 7 pont)

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{x \operatorname{tg} x}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^n$

3. Legyen

$$f(x) := \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x-3}}{x}.$$

Hol folytonos ez a függvény? Határozza meg a jellegzetes limeseit, vázlatosan ábrázolja! (12 pont)

4. Definíció szerint (küszöbszámkereséssel) igazolja, hogy $\frac{4^n}{n!} \rightarrow 0$! (5 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az f függvény jobboldali határértéke az a -ban $-\infty$? (Mindkét definíciót adja meg!)
2. Mit jelent az, hogy az f függvény differenciálhányadosa az a -ban q ? (Mindkét definíciót adja meg!)
3. Mit jelent az, hogy az f függvény felülről korlátos az I intervallumon?
4. Mit jelent az, hogy az f függvény egyenletesen folytonos az I intervallumon?
5. Definiálja az $\sqrt[n]{x}$ függvényeket!
6. Mondja ki a hányadosfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!

C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Lehet-e egy folytonos és egy nem folytonos függvény szorzata folytonos?
2. Adott két konvergens sorozat, $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, és tudjuk, hogy van olyan ν , hogy bármely $n > \nu$ esetén $a_n < b_n$. Lehetséges-e, hogy $a \geq b$?
3. Fogalmazza meg (pozitív állító formában) a (számsorozatokra vonatkozó) Cauchy-féle konvergenciakritériumban szereplő feltétel *tagadását*!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók.

Jó munkát!