

**VIZSGADOLGOZAT**  
mat.tanár szak I. évf., 2001. 01. 17.

**A. Feladatok**

1. Legyen  $f(x) := \sqrt{\log_2 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(1-x)}$ . Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (10 pont)
2. Számolja ki az alábbi határértékeket: (6 + 8 pont)

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{3x+7} \right)^{x+1}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$

3. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{2 - 2^{\operatorname{tg} x}}.$$

Hol folytonos ez a függvény? Határozza meg a jellegzetes limeseit, értékkészletét, vázlatosan ábrázolja! (15 pont)

4. Definíció szerint (küszöbszámkereséssel) igazolja, hogy

$$\frac{n^3 - 3n + 2}{n^2 + 3n + 2} \rightarrow \infty ! \quad (6 \text{ pont})$$

**B. Definíciók, tételek**

(6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az  $f$  függvény folytonos az  $a$  helyen? (Mindkét definíciót adja meg!)
2. Mondja ki az összetett függvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
3. Mit jelent az, hogy az  $f$  függvény Bolzano–Darboux tulajdonságú az  $I$  intervallumon?
4. Definiálja egy számhalmaz infimumát (a formális definíciót adja meg)!
5. Definiálja az  $\arccos x$  függvényt!
6. Mit ért az alatt, hogy az  $f$  függvénynek az  $a$  helyen lokális maximuma van?

**C. További kérdések**

(3 × 7 pont)

1. Van-e a  $(\cos n)^n$  sorozatnak konvergens részsorozata?
2. Van-e olyan függvény, amely a  $(-1, 1)$  intervallumon differenciálható, de nem korlátos?
3. Legyen  $a_n$  egy konvergens sorozat,  $a_n \neq 0$ . Igaz-e, hogy szükségképpen

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1 ?$$

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók.

Jó munkát!