

VIZSGADOLGOZAT
mat.tanár szak I. évf., 2001. 01. 10.

A. Feladatok

1. Legyen $f(x) := \sqrt{\arcsin(x+3-|x+2|)}$. Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (10 pont)
2. Számolja ki az alábbi határértékeket: (7 + 7 pont)

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - n^2 \cos \frac{1}{n}$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x+1}}{\sqrt[3]{2+x+x}}$

3. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{1 + e^{1/(1-x)}}$$

- Hol folytonos ez a függvény? Határozza meg a jellegzetes limeseit, vázlatosan ábrázolja, adja meg az értékkészletet! (12 pont)
4. Legyen $f(x) := \operatorname{tg} x$, $g(x) := \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$. Ábrázolja az $f(g)$ és $g(f)$ összetett függvényeket! (9 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az f függvény differenciálhányadosa az a helyen q ? (Mindkét definíciót adja meg!)
2. Mondja ki a folytonos függvények hányadosáról szóló tételt!
3. Definálja az f és g függvények $f(g)$ összetételét!
4. Definálja az a^x ($a > 0$) függvényt!
5. Mit jelent az, hogy az f függvény baloldali határértéke az a -ban c ? (Mindkét definíciót adja meg!)
6. Mondja ki a korlátos zárt intervallumon folytonos függvények korlátosságáról szóló tételt!

C. További kérdések (3 × 7 pont)

1. Egy függvényről tudjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} = 0.$$

- Igaz-e, hogy a függvény szükségképpen differenciálható?
2. Igaz-e, hogy ha egy függvény az $[a, b]$ (zárt) intervallumon invertálható, akkor ott szigorúan monoton?
 3. Mit jelent az, hogy egy f függvény *nem* folytonos az a helyen? (Pozitív állító formában fogalmazza meg, "epszilonos" alakban! Feltehetjük, hogy $\exists I_a : I_a \subset D_f$.)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók.

Jó munkát!