

**VIZSGADOLGOZAT**  
mat.tanár szak I. évf., 2001. 01. 03.

**A. Feladatok**

1. Legyen

$$f(x) := \arcsin \frac{1}{|x|} + \log_2(5 - x^2).$$

Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (10 pont)

2. Számolja ki az alábbi határértékeket: (8 + 6 pont)

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \qquad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 - 5n + 3}{n^4 + n^2 + 1}}$$

3. Legyen

$$f(x) := \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x}.$$

Hol folytonos ez a függvény? Határozza meg a jellegzetes limeseit, vázlatosan ábrázolja! (14 pont)

4. Definíció szerint (küszöbszámkereséssel) igazolja, hogy

$$\frac{x + 1}{x - 1} \rightarrow 1, \quad \text{ha } x \rightarrow -\infty! \quad (7 \text{ pont})$$

**B. Definíciók, tételek** (6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az  $f$  függvény folytonos az  $a$  helyen? (Mindkét definíciót adja meg!)
2. Mondja ki a hányadosfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
3. Mondja ki a rendőr-elvet!
4. Definiálja az  $f$  függvény inverzét!
5. Mondja ki a (számsorozatokra vonatkozó) Cauchy-féle konvergenciakritériumot!
6. Mit jelent az, hogy az  $f$  függvény monoton csökkenő a  $D_f$  halmazon? (A definíciót adja meg!)

**C. További kérdések** (3 × 7 pont)

1. Igaz-e, hogy ha  $f$  és  $g$  olyan függvények, hogy az  $f(g)$  összetételük folytonos  $a$ -ban, akkor szükségképpen  $g$  is folytonos  $a$ -ban?
2. Legyen  $a_n$  olyan sorozat, amelyre  $a_{n+1} - a_n \rightarrow 0$ . Következtethetünk-e arra, hogy  $a_n$  konvergens?
3. Fogalmazza meg (pozitív állító formában), mit jelent az, ha az  $f$  függvény *nem* egyenletesen folytonos  $(a, b)$ -n! (Feltehetjük, hogy  $(a, b) \subseteq D_f$ .)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók.

Jó munkát!