

**VIZSGADOLGOZAT**  
mat.tanár szak I. évf., 2000. 12. 27.

**A. Feladatok**

1. Legyen  $f(x) := \arccos(\log_2(1 - x^2))$ . Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (10 pont)

2. Számolja ki az alábbi határértékeket: (10 + 6 pont)

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg} x}}{x} \qquad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \operatorname{arc} \operatorname{tg} n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

3. Legyen

$$f(x) := \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}.$$

Hol folytonos ez a függvény? Határozza meg a jellegzetes limeseit, vázlatosan ábrázolja! (14 pont)

4. Definíció szerint (küszöbszámkereséssel) igazolja, hogy

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow 0! \quad (5 \text{ pont})$$

**B. Definíciók, tételek**

(6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az  $f$  függvény határértéke  $c$  a  $-\infty$ -ben? (Mindkét definíciót adja meg!)
2. Mondja ki az inverzfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
3. Mondja ki a korlátos zárt intervallumon folytonos függvény szélsőértékeiről szóló tételt!
4. Definiálja egy számhalmaz infimumát (a formális definíciót adja meg)!
5. Definiálja az  $\sqrt[n]{x}$  függvényeket!
6. Mit ért az alatt, hogy az  $f$  függvénynek az  $a$  helyen lokális minimuma van?

**C. További kérdések**

(3 × 7 pont)

1. Igaz-e, hogy ha egy sorozatnak csak egy torlódási pontja van, akkor szükségképpen konvergens?
2. Igaz-e, hogy ha egy függvény az  $[a, b]$  (zárt) intervallumon invertálható, akkor ott szigorúan monoton?
3. Fogalmazza meg (pozitív állító formában) a (számsorozatokra vonatkozó) Cauchy-féle konvergenciakritériumban szereplő feltétel *tagadását!*

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók.

Jó munkát!