

**VIZSGADOLGOZAT**  
mat.tanár szak I. évf., 2000. 12. 21.

**A. Feladatok**

1. Legyen  $f(x) := \arccos(\log_2(x^2 - 1))$ . Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (10 pont)
2. Számolja ki az alábbi határértékeket: (8 + 8 pont)

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{3x+7}\right)^{x+1}$       b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin \frac{1}{n}}$

3. Legyen

$$f(x) := \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}.$$

Hol folytonos ez a függvény? Határozza meg a jellegzetes limeseit, vázlatosan ábrázolja! (14 pont)

4. Definíció szerint (küszöbszámkereséssel) igazolja, hogy

$$\frac{3^n}{n!} \rightarrow 0! \quad (5 \text{ pont})$$

**B. Definíciók, tételek**

(6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az  $f$  függvény határértéke  $-\infty$  a (véges)  $a$  helyen? (Mindkét definíciót adja meg!)
2. Mondja ki az inverzfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
3. Mondja ki a korlátos zárt intervallumon folytonos függvény szélsőértékeiről szóló tételt!
4. Definálja egy számhalmaz infimumát (a formális definíciót adja meg)!
5. Definálja az  $a^x$  ( $a > 0$ ) függvényt!
6. Mondja ki a (számsorozatokra vonatkozó) Cauchy-féle konvergenciakritériumot!

**C. További kérdések**

(3 × 7 pont)

1. Van-e a  $(\cos n)^n$  sorozatnak konvergens részsorozata?
2. Igaz-e, hogy ha egy függvény az  $[a, b]$  (zárt) intervallumon invertálható, akkor ott szigorúan monoton?
3. Mit jelent az, hogy egy  $f$  függvény *nem* folytonos az  $a$  helyen? (Pozitív állító formában fogalmazza meg, "epszilonos" alakban!)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók.

Jó munkát!