

VIZSGADOLGOZAT

Többvált. fv.tan elemei, 2008. 01. 22.

A. Feladatok

- Adja meg a $\sin x + \cos y + \cos(x - y)$ függvény szélsőértékeit a $0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{2}$ (zárt) négyzetlapon! (12 pont)
- Tekintsük az $\int_0^2 (\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy) dx$ integrált! Ábrázolja az integrációs tartományt és cserélje föl az integráció sorrendjét! (7 pont)
- Vizsgálja a $\sqrt[3]{xy}$ függvény parciális és totális differenciálhatóságát! (12 pont)
- Számolja ki az

$$\int_L \frac{(x+y) dx - (x-y) dy}{x^2 + y^2}$$

integrált, ahol az L görbe az $x^2 + y^2 = 4$ zárt görbe pozitív irányításban! (7 pont)

- Integráló tényező segítségével tegye egzakttá és oldja meg az $\frac{y}{x} + (y^3 - \log x)y' = 0$ differenciálegyenletet! (7 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

- Definiálja a skaláris szorzatos tér fogalmát!
- Definiálja egy $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz n -edik külső sokszögét!
- Mit ért az alatt, hogy az f függvény totálisan differenciálható az $A \in \mathbb{R}^k$ pontban?
- Mondja ki a kettős integrál szukcesszív kiszámításáról szóló tételt!
- Definiálja az $\int_G P(x, y) dx$ vonalintegrált!
- Mondja ki a kétváltozós függvény szélsőértéke létezésének elegendő feltételét!

C. További kérdések

(3 × 7 pont)

- Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos. Számolja ki az alábbi határértéket:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \iint_{x^2 + y^2 \leq r^2} f(x, y) dx dy.$$

- Számolja ki az $\iint_N [x + y] dx dy$, integrált, ahol N az $0 \leq x, y \leq 1$ négyzetlap és $[\cdot]$ az egészrész-függvény!
- Adjon meg olyan $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazt, amelynek torlódási pontjainak halmaza nyílt!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!