

## VIZSGADOLGOZAT

Többbált. fvtan elemei, 2008. 01. 15.

### A. Feladatok

1. Adja meg a  $\sin x \sin y \sin(x + y)$  függvény szélsőértékeit a  $0 \leq x, y \leq \pi$  négyzeten! (12 pont)

2. Legyen  $f(x, y) := \sqrt{x^y + 1}$ . Adja meg a függvényfelszínhez a  $A = (2, 3)$  pontban húzható érintősík egyenletét! Melyik irányban maximális az  $A$ -ban vett iránymenti derivált? (8 pont)

3. Számolja ki az  $\int_0^{\pi/2} \left( \int_{\cos x}^1 y^4 dy \right) dx$  integrált, árázolja az integrációs tartományt és cserélje föl az integráció sorrendjét! (9 pont)

4. Számolja ki az

$$\iint_T \left( 1 + \frac{y^2}{x^2} \right) dx dy$$

integrált, ahol  $T$  az  $x \leq y \leq -x$ ,  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$  tartomány! (9 pont)

5. Integráló tényező segítségével tegye egzakttá és oldja meg az  $2y + xy^3 + (x + x^2y^2)y' = 0$  differenciálegyenletet! (7 pont)

### B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit ért az alatt, hogy egy tartomány nyílt és összefüggő?
2. Mondja ki az egymásba skatulyázott zárt halmazokról szóló tételt!
3. Mit ért az alatt, hogy egy kvadratikus alak negatív szemidefinit?
4. Mondja ki a (kettős integrálokra vonatkozó) oszcillációs kritériumot!
5. Mondja ki az implicitfüggvény-tételt!
6. Mondja ki az összetett függvény parciális differenciálhatóságáról szóló tételt!

### C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Van-e olyan  $H \subset \mathbb{R}^2$  halmaz, amely torlódási pontjainak a halmaza nyílt?
2. Távolagsdefinió-e az adott  $[a, b]$  zárt intervallumon (Riemann szerint) integrálható függvények halmazán a  $d(f, g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$  függvény?
3. Legyen

$$I_r := \int_{K_r} \frac{y dx - x dy}{(x^2 + xy + y^2)^2},$$

ahol  $K_r$  az  $x^2 + y^2 = r^2$  kör pozitív irányításban. Határozza meg  $I_r$  határértékét, ha  $r \rightarrow \infty$ !

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!