VIZSGADOLGOZAT

Többvált. fv.tan elemei, 2015. 01. 15.

A. Feladatok

1. Adja meg az $x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$ függvény szélsőértékeit és értékkészletét. (9 pont)

2. Számolja ki

$$\int_G \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,,$$

ahol G az $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ ellipszis $(3,0)$-ból $(0,4)$-be vezető (rövidebbik) íve. Igazolja, hogy az integrál útfüggetlen. (7 pont)

3. Adja meg az $z := \sqrt{x^y + 1}$ felülethez a $(2,3)$ pontban húzható érintősík egyenletét. (6 pont)

4. Számolja ki (8 pont)

$$\iint_T xy^2\,dx\,dy\,, \quad T:\; x^2+y^2 \le 4,\; 0 \le x, y$$

5. Vizsgálja a $\sqrt{xy}$ függvény parciális és totális differenciálhatóságát. (10 pont)

B. Definíciók, tételek (5 × 4 pont)

1. Definiálja a kompakt halmaz fogalmát. Melyek a kompakt halmazok $\mathbb{R}^k$-ban?
2. Definiálja az irány szerinti derivált fogalmát. Hogyan határozható meg?
3. Mondja ki az összetett függvény parciális differenciálhatóságáról szóló tételt.
4. Mondja ki a kettős integrál szukcesszív kiszámításáról szóló tételt.
5. Mondja ki a Young tételt.

C. További kérdések

1. Van-e olyan an kétváltozós függvény, amelyik folytonos, de nem korlátos valamely a) korlátos és nyílt; b) nem korlátos és zárt; c) Jordan-mérhető és zárt halmazon? (7 pont)

2. Definiálja a nyílt halmaz általános fogalmát. Mit tud nyílt halmazok uniójáról és metszetéről? (7 pont)

3. Van-e olyan $H_n \subset K \subset \mathbb{R}^2$halmazsorozat (itt K egy „jó nagy” körlap), amelyre $\forall n:$ H_n Jordan-mérhető, $H_n \subset H_{n+1}$ és $\bigcup H_n$ nem Jordan-mérhető? (6 pont)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!