

**VIZSGADOLGOZAT**  
Többvált. fv.tan elemei, 2015. 01. 08.

**A. Feladatok**

1. Tekintsük az

$$12x^2 + 9y^2 - 12xy - 8 = 0$$

egyenletű (korlátos) görbét. (Vajon milyen görbe lehet? :-)) Foglaljuk be egy téglalapba, amelynek élei a koordinátatengelyekkel párhuzamosak. Mekkora a téglalap ( $y$  irányú) magassága? (9 pont)

2. Adja meg a  $4xy - x^4 - y^4$  függvény szélsőértékeit és értékkészletét. (12 pont)

3. Számolja ki az  $\iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy$  integrált, ahol  $D$  az  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ ,  $\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x$  tartomány. Ábrázolja is a tartományt. (7 pont)

4. Számolja ki az  $\int_0^{\pi/2} \left( \int_{\cos x}^1 y dy \right) dx$  integrált, ábrázolja az integrációs tartományt és cserélje föl az integráció sorrendjét! (6 pont)

5. Határozza meg: (6 pont)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$$

**B. Definíciók, tételek**

(5 × 4 pont)

1. Mit ért az alatt, hogy a kétváltozós  $f(x, y)$  függvény folytonos az  $(a, b)$  pontban? (Mindkét definíciót adja meg.)

2. Mondja ki az  $f(x, y) = 0$  egyenlet által meghatározott  $y = y(x)$  függvényről szóló implicitfüggvény-tételt.

3. Definiálja az „összefüggő nyílt tartomány” fogalmát.

4. Mit jelent az, hogy egy függvény (totálisan) differenciálható?

5. Mondja ki a kettős integrálról szóló Darboux-féle tételt.

**C. További kérdések**

1. Számolja ki az  $\iint_D [x + y] dx dy$ , ahol  $D$  a  $0 \leq x, y \leq 2$  négyzet és  $[\cdot]$  az egészrész-függvény. (6 pont)

2. Legyen az  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  függvény az  $A$ -ban folytonos, és legyen  $g(\mathbf{e}) := f'_{\mathbf{e}}(A)$  (azaz az  $\mathbf{e}$  irány szerinti derivált). Igazolja, hogy  $g$  az egységgömbön folytonos. Mik a szélsőértékei? (7 pont)

3. Van-e olyan Jordan-nem-mérhető korlátos halmaz, amelynek a) belseje; b) lezártja; c) határa mérhető? (7 pont)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!