

## VIZSGADOLGOZAT

Többvált. fvtan elemei, 2007. 12. 27.

### A. Feladatok

1. Adja meg az  $e^{2x}(x + y^2 + 2y)$  függvény szélsőértékeit! (8 pont)
2. Tekintsük az  $\int_0^1 (\int_0^{x^2} f(x, y) dy) dx + \int_1^3 (\int_0^{(3-x)/2} f(x, y) dy) dx$  integrált! Ábrázolja az integrációs tartományt és cserélje föl az integráció sorrendjét! (9 pont)
3. Számolja ki az  $\iint_T \frac{x^2}{y^2} dx dy$  integrált, ahol  $T$  az  $x = 2$ ,  $y = x$ ,  $xy = 1$  görbék által határolt tartomány! (7 pont)
4. Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Bizonyítsa be, hogy  $f$  a  $(0, 0)$  pontban nem folytonos, de minden  $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$  esetén  $f(t \cdot \mathbf{e}) \rightarrow 0$ , ha  $t \rightarrow 0$ ! Vizsgálja a függvény parciális és totális differenciálhatóságát az origóban és az origón kívül is! (13 pont)

5. Integráló tényező segítségével tegye egzakttá és oldja meg az  $(x \cos y - y \sin y)y' + (x \sin y + y \cos y) = 0$  differenciálegyenletet! (8 pont)

### B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mondja ki a Jordan tételt!
2. Mit ért az alatt, hogy egy  $H \subset \mathbb{R}^2$  halmaz korlátos és zárt?
3. Mit ért az alatt, hogy az  $f$  függvény totálisan differenciálható az  $A \in \mathbb{R}^k$  pontban?
4. Mondja ki a Green-formulát!
5. Mondja ki a vonalintegrál útfüggetlenségének feltételét (a potenciálfüggvényes alakot)!
6. Mondja ki a Young-féle tételt!

### C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Fogalmazza meg (pozitív állító alakban), mit jelent az, hogy egy tartomány *nem* csillagszerű!
2. Számolja ki az  $\iint_D [x + y] dx dy$  integrált, ahol  $D$  a  $0 \leq x, y \leq 2$  tartomány és  $[\cdot]$  az egészrész-függvény!
3. Adjon (minél pontosabb) becslést a „ $\frac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ , ha  $|x|, |y|$  kicsi” formula hibájára!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!