VIZSGADOLGOZAT

Többvált. fv.tan, 2015. 01. 15.

A. Feladatok

1. Adja meg az $x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$ függvény szélsőértékeit és értékkészletét. (9 pont)

2. Adja meg az $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ függvény szélsőértékeit az $x + y + z = 1$ feltétel mellett. (8 pont)

3. Igazolja, hogy a határérték nem létezik; adja meg az ismételt határértékeket. (8 pont)

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,0^+)} \frac{x^y}{1+x^y}$$

4. Számolja ki (9 pont)

$$\iint_T xy\,dx\,dy\,, \quad T:\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}\le 1,\ 0\le x,y$$

5. Adjon (minél pontosabb) becslést a közelítő formula hibájára. (6 pont)

$$\cos(x-y)\approx 1-\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2\,, \quad |x|,|y|\le\delta$$

B. Definíciók, tételek (5 × 4 pont)

1. Definiálja a kompakt halmaz fogalmát. Melyek a kompakt halmazok $\mathbb{R}^k$-ban?

2. Mondja ki az $f(x, y, z) = 0$ egyenlet által meghatározott $y = y(x, z)$ függvényről szóló implicitfüggvény-tételt.

3. Mondja ki az összetett függvény parciális differenciálhatóságáról szóló tételt.

4. Definiálja a norma általános fogalmát.

5. Mondja ki a Young tételt.

C. További kérdések

1. Legyen $f(x, y)$ folytonos az $-1 \le x, y \le 1$ négyzeten. Határozza meg (7 pont) :

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{r^2}\iint_D f(x,y)\,dx\,dy\,, \quad D: x^2+y^2\le r^2$$

2. Legyen $I_r := \int_{K_r} \frac{x\,dy - y\,dx}{(x^2+xy+y^2)^2}$ ahol K_r az $x^2 + y^2 = r^2$ körvonal. Határozza meg az I_r határértékét, ha $r \to \infty$ (az integrált nem kell kiszámolni). (7 pont)

3. Van-e olyan $H_n \subset K \subset \mathbb{R}^2$halmazsorozat (itt K egy „jó nagy” körlap), amelyre $\forall\, n$: H_n Jordan-mérhető, $H_n \subset H_{n+1}$ és $\bigcup H_n$ nem Jordan-mérhető? (6 pont)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!