

VIZSGADOLGOZAT
Többvált. fv.tan, 2015. 01. 08.

A. Feladatok

1. Tekintsük az

$$12x^2 + 9y^2 - 12xy - 8 = 0$$

egyenletű (korlátos) görbét. (Vajon milyen görbe lehet? :-)) Foglaljuk be egy téglalapba, amelynek élei a koordinátatengelyekkel párhuzamosak. Mekkora a téglalap (x irányú) szélessége? (9 pont)

2. Hogy néz ki az $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ test? Adja meg az $f(x, y, z) = x + y + z$ függvény szélsőértékeit ezen a testen. (12 pont)

3. Számolja ki az $\iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy$ integrált, ahol D az $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, $\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x$ tartomány. Ábrázolja is a tartományt. (7 pont)

4. Számolja ki az $\int_0^{\pi/2} \left(\int_{\cos x}^1 y dy \right) dx$ integrált, ábrázolja az integrációs tartományt és cserélje föl az integráció sorrendjét! (6 pont)

5. Integráló tényező segítségével tegye egzakttá és oldja meg az $xy^2 + y - xy' = 0$ differenciálegyenletet. (6 pont)

B. Definíciók, tételek (5 × 4 pont)

1. Definiálja a kompakt halmaz fogalmát. Melyek a kompakt halmazok \mathbb{R}^k -ban?
2. Mondja ki az $f(x, y, z) = 0$ egyenlet által meghatározott $y = y(x, z)$ függvényről szóló implicitfüggvény-tételt.
3. Definiálja az „összefüggő nyílt tartomány” fogalmát.
4. Mit jelent az, hogy egy függvény (totálisan) differenciálható?
5. Mondja ki a kettős integrálról szóló Darboux-féle tételt.

C. További kérdések

1. Legyen $f(x, y)$ folytonos az $-1 \leq x, y \leq 1$ négyzeten. Határozza meg (7 pont) :

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^2} \iint_D f(x, y) dx dy, \quad D : x^2 + y^2 \leq r^2$$

2. Legyen az $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az A -ban folytonos, és legyen $g(\mathbf{e}) := f'_{\mathbf{e}}(A)$ (azaz az \mathbf{e} irány szerinti derivált). Igazolja, hogy g az egységgömbön folytonos. Mik a szélsőértékei? (6 pont)

3. Van-e olyan $H \subseteq \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz, amely torlódási pontjainak halmaza a) nyílt; b) valódi részként tartalmazza az egész H -t; c) valódi része H -nak? (7 pont)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!