

VIZSGADOLGOZAT
Többvált. fv.tan, 2014. 01. 28.

A. Feladatok

1. Adja meg a $e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ függvény szélsőértékeit. (8 pont)
2. Adja meg az $f(x, y, z) := x + 2y + 3z$ kifejezés szélsőértékeit az $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ gömbön. (10 pont)
3. Vizsgálja a parciális és a totális differenciálhatóságot. (10 pont)

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{ha } x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

4. Ábrázolja az integrációs tartományt, számolja ki az integrált. (9 pont)

a) $\iint_D \frac{y^2}{x^2} dx dy, \quad D : x^2 + y^2 \leq x$

5. Oldja meg az $x dx - y dy = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ differenciálegyenletet. (8 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Mit ért az alatt, hogy egy kvadratikus forma negatív szemidefinit?
2. Mondja ki a Cantor-tételt.
3. Mondja ki a Young-tételt.
4. Mit jelent az, hogy egy függvény (totálisan) differenciálható?
5. Definiálja a norma általános fogalmát.
6. Mondja ki a kettős integrálra vonatkozó Darboux-tételt.

C. További kérdések (3 × 7 pont)

1. Legyen $C[a, b]$ az $[a, b]$ zárt intervallumon folytonos függvények halmaza. Igazolja vagy cáfolja, hogy az alábbi kifejezés egy távolságdefiníció: $d(f, g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

2. Legyen

$$I_R := \int_C \frac{x dy - y dx}{(x^2 - xy + y^2)^2}, \quad C : x^2 + y^2 = R^2 \text{ körvonal}$$

. Határozza meg I_R határértékét, ha $R \rightarrow \infty$.

3. Mutasson példát olyan függvényre, nem korlátos, és a) korlátos nyílt halmazon folytonos; b) nem korlátos zárt halmazon folytonos.

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!