

## VIZSGADOLGOZAT

Többvált. fv.tan, 2014. 01. 21.

### A. Feladatok

- Adja meg a  $\sin x \sin y \sin(x+y)$  függvény szélsőértékeit és értékkészletét a  $0 \leq x, y \leq \pi$  tartományon. (9 pont)
- Hogy néz ki az  $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$  test? Adja meg az  $f(x, y, z) = x + y + z$  függvény szélsőértékeit ezen a testen. (12 pont)
- Számolja ki az alábbi vonalmenti integrálokat! (5 + 6 pont)
  - $\int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$ , ahol  $L$  az  $y = x^2$  parabola  $-1 \leq x \leq 1$  íve
  - $\int_L (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy$ , ahol  $L$  az  $y = x^3$  görbe  $-1 \leq x \leq 1$  íve
- Számolja ki az

$$\int_0^{\pi/2} \left( \int_{\cos x}^1 y^4 dy \right) dx$$

integrált, ábrázolja az integrációs tartományt és cserélje föl az integráció sorrendjét! (6 pont)

- Integráló tényező segítségével tegye egzakttá és oldja meg az  $xy^2 + y - xy' = 0$  differenciálegyenletet. (7 pont)

### B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

- Mondja ki az ismételt határérték és a határérték létezése közötti kapcsolatot leíró tétel(eke)t.
- Mondja ki az  $f(x, y, z) = 0$  egyenlet által meghatározott  $y = y(x, z)$  függvényről szóló implicitfüggvény-tételt.
- Definiálja az „összefüggő nyílt tartomány” fogalmát.
- Mit jelent az, hogy egy függvény (totálisan) differenciálható?
- Mondja ki a vonalmenti integrál útfüggetlenségéről szóló tételt (a potenciálfüggvény segítségével).
- Definiálja a belső Jordan-mértéket.

### C. További kérdések

(3 × 7 pont)

- Legyen  $f(x, y)$  folytonos az  $-1 \leq x, y \leq 1$  négyzeten. Határozza meg a határértéket:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^2} \iint_D f(x, y) dx dy, \quad D : x^2 + y^2 \leq r^2$$

- Legyen az  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  függvény az  $A$ -ban folytonos, és legyen  $g(\mathbf{e}) := f'_{\mathbf{e}}(A)$ . Igazolja, hogy  $g$  az egységgömbön folytonos. Mik a szélsőértékei?
- Van-e olyan  $H \subseteq \mathbb{R}^2$  korlátos halmaz, amely torlódási pontjainak halmaza a) nyílt; b) valódi részként tartalmazza az egész  $H$ -t; c) valódi része  $H$ -nak?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!