

VIZSGADOLGOZAT
Többvált. fv.tan, 2014. 01. 14.

A. Feladatok

1. Adja meg az $f(x, y) := y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$ függvény szélsőértékeit és az értékkészletét. (8 pont)
2. Vizsgálja a $\sqrt{|xy^2|}$ függvény parciális és totális differenciálhatóságát. Vázolja a szintvonalakat. (11 pont)
3. Számolja ki az

$$\int_G \frac{x dx + y dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

integrált, ahol G az $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ ellipszis $(3, 0)$ -ból $(0, -4)$ -be vezető (rövidebb) íve. (7 pont)

4. Ábrázolja az integrációs tartományt és számolja ki az integrált. (7+7 pont)

a) $\iint_D 1 - y dx dy; \quad D: x^2 + y^2 \leq 2y, y \leq x^2, x \geq 0$

b) $\int_1^2 \left(\int_1^y \frac{\log x}{x} dx \right) dy + \int_2^4 \left(\int_{y/2}^2 \frac{\log x}{x} dx \right) dy$

5. Legyen $u(x, y) := \arctg \frac{y}{x}$. Igazolja, hogy az $x > 0$ félsíkon $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$. (5 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Mondja ki a kettős integrál általános transzformációjáról szóló tételt.
2. Mondja ki az összetett függvény parciális differenciálhatóságáról szóló tételt.
3. Mondja ki a Cantor-tételt.
4. Mit jelent az, hogy egy függvény korlátos változású?
5. Definiálja a norma fogalmát.
6. Mikor egzakt egy differenciálegyenlet? Mik a megoldásai?

C. További kérdések (3 × 7 pont)

1. Az $f(x, y, z) = 0$ és a $g(x, y, z) = 0$ (síma) egyenletek két felületet határoznak meg, metszetük egy görbe. Adja meg a görbéhez valamely (a, b, c) pontjában húzható érintő irányát!
2. Számolja ki az $\iint_N [x + y] dx dy$ integrált, ahol N a $0 \leq x, y \leq \frac{3}{2}$ négyzet és $[\cdot]$ az egészrész-függvény.
3. Van-e olyan $H \subseteq \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz, amelynek torlódásai pontjainak halmaza a) nyílt; b) tartalmazza az egész H -t?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!