VIZSGADOLGOZAT

Többvált. fv.tan, 2014. 01. 07.

A. Feladatok

1. Adja meg az $f(x,y) := 2y^3 + x^2y + 5y^2 + x^2 + 1$ függvény szélsőértékeit. (9 pont)

2. Vizsgálja a $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ függvény parciális és totális differenciálhatóságát. (12 pont)

3. Számolja ki a

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x^2+y^2+1}{(x-y)^4+1}$$

határértéket. (5 pont)

4. Ábrázolja az integrációs tatományt és számolja ki az integrált. (6+7 pont)

a) $\displaystyle\int_1^2 \Big(\int_{1/x}^x y^4\,dy \Big)\,dx$ b) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,; \quad D:\ x \le x^2+y^2 \le 2x,\ y \ge 0$

5. Oldja meg a differenciálegyenletet: (6 pont)

$$y' = \frac{e^y}{2y - xe^y}$$

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Definiálja a kompakt halmaz fogalmát. Melyek $\mathbb{R}^k$-ban a kompakt halmazok?

2. Mondja ki a (kétváltozós) függvény szélsőértéke létezésének elegendő feltételét.

3. Mondja ki a kettős integrálra vonatkozó Darboux-féle tételt.

4. Mondja ki a szukcesszív integrálásról szóló tételt.

5. Definiálja a (kétváltozós) vonalmenti integrált.

6. Mondja ki a totális és az irány szerinti differenciálhatóság közötti kapcsolatot leíró tétel(eke)t.

C. További kérdések (3 × 7 pont)

1. Az $f(x,y,z) = 0$ és a $g(x,y,z) = 0$ (síma) egyenletek két felületet határoznak meg, metszetük egy görbe. Adja meg a görbéhez valamely (a,b,c) pontjában húzható érintő irányát!

2. Igazolja, hogy a sík pontjainak halmazán $d(P,Q) := \begin{cases} 1, & \text{ha } P \ne Q, \\ 0, & \text{ha } P = Q \end{cases}$ egy távolságfüggvény. Melyek a konvergens sorozatok? Melyek a zárt halmazok?

3. Van-e olyan nem-Jordan-mérhető korlátos halmaz, amelynek a) belseje; b) lezártja; c) határa mérhető?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!