

**VIZSGADOLGOZAT**  
Többvált. fv.tan, 2013. 01. 29.

**A. Feladatok**

1. Adja meg az  $f(x, y) := x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$  függvény szélsőértékeit, valamint az értékkészletét. (8 pont)
2. Ábrázolja az integrációs tartományt, számolja ki az integrált, cserélje föl az integráció sorrendjét: (6 pont)

$$\int_{-1}^1 \left( \int_{|y|-1}^{1-|y|} (x+y)^3 dx \right) dy$$

3. Számolja ki az  $\frac{y^2 \sin x + x^2 \sin y}{xy}$   $((x, y) \rightarrow (0, 0))$  határértéket. (6 pont)
4. Legyen  $f(x, y) := \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ . Vizsgálja a függvény parciális és totális differenciálhatóságát a  $(0, 0)$  és az  $(1, -1)$  pontokban. (12 pont)
5. Számolja ki az

$$\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy$$

integrált, ahol  $D$   $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $x \leq 0 \leq y$  tartomány. (8 pont)

6. Legyen  $f(x, y) := (\sin x)^{\cos y}$ . Írja föl a  $(\frac{\pi}{2}, 0)$  pontban húzható érintősík egyenletét. (5 pont)

**B. Definíciók, tételek** (6 × 4 pont)

1. Mondja ki a helyi szélsőérték létezésének elegendő feltételét (elég a kétváltozós esetben).
2. Definiálja a Jordan-mérték definíciójában szereplő külső és belső sokszögek fogalmát.
3. Mondja ki a vonalmenti integrál útfüggetlenségéről szóló tételt (a parciális deriváltakkal).
4. Definiálja az  $\int_L P(x, y) dx$  vonalmenti integrált.
5. Mondja ki az implicitfüggvény-tételt az  $f(x, y, z) = 0$  által meghatározott  $z = z(x, y)$  függvényre.
6. Definiálja halmaz torlódási pontja fogalmát.

**C. További kérdések** (3 × 7 pont)

1. Legyen  $I_r := \int_{K_r} \frac{x dy - y dx}{(x^2 + xy + y^2)^2}$  ahol  $K_r$  az origó körüli  $r$  sugarú kör. Számolja ki az  $I_r$  határértékét, ha  $r \rightarrow \infty$ .
2. Számolja ki az  $\iint_D xy dx dy$  integrált, ahol  $D$  az  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$ ,  $0 \leq x, y$  tartomány.
3. Adjon (minél pontosabb) becslést a „ $\frac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - (x^2 - y^2)$ , ha  $x, y$  kicsi” közelítő formula hibájára.

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!