

VIZSGADOLGOZAT
Többvált. fv.tan, 2013. 01. 22.

A. Feladatok

1. Adja meg az $f(x, y) := y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$ függvény szélsőértékeit, valamint a függvény értékkészletét. (10 pont)
2. Ábrázolja az integrációs tartományt, számolja ki az integrált, cserélje föl az integráció sorrendjét: (7 pont)

$$\int_0^3 \left(\int_{-\sqrt{3x-x^2}}^{\sqrt{3x}} 2y \, dy \right) dx$$

3. Számolja ki az alábbi határértéket: (6 pont)

$$\frac{x^y}{1+x^y} \quad ((x, y) \rightarrow (\infty, 0^+))$$

4. Legyen $f(x, y) := \sqrt{|xy|}$. Vizsgálja a függvény parciális és totális differenciálhatóságát a $(0, 0)$ és az $(1, 0)$ pontokban. (10 pont)
5. Adja meg az $f(x, y) := x^2 + 2y^2$ függvény $x + y = 1$ feltétel melletti szélsőértékeit. (6 pont)
6. Számolja ki az $\int_L 2xy \, dx + x^2 \, dy$ integrált, ahol L az origóból az $(1, 2)$ pontba vezető egyenesszakasz. (6 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Definiálja az irány szerinti derivált fogalmát.
2. A kettős integrál felépítése során hogyan értelmeztük a tartomány felosztását és az alsó integrálközelítő összeget?
3. Mit ért az alatt, hogy az f k -változós függvény az $a \in \mathbb{R}^k$ pontban folytonos? (Mindkét definíciót adja meg.)
4. Definiálja a norma fogalmát.
5. Mi a kapcsolat egy halmaz és a határa Jordan-mérhetősége között?
6. Mondja ki a kettős integrál polártranszformációjáról szóló tételt.

C. További kérdések (3 × 7 pont)

1. Igazolja vagy cáfolja az alábbi állításokat: a) Nyílt halmazok uniója mindig nyílt. b) Nyílt halmazok metszete mindig nyílt.
2. Legyen $f(x, y, z) := x^2 + 2y^2 + 3z^2$. Hol van f -nek szélsőértéke az $x + y + z = 1$ feltétel mellett? Milyen jellegű ez a szélsőérték?
3. Igazolja, hogy az $e^y(y - y') = e^x(xy' - 1)$ differenciálegyenletnek van $\mu = \mu(x + y)$ alakú integráló tényezője. (Megoldani nem kell.)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!